入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2024 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第　1　問

座標空間内の点 A $(0,\ -1,\ 1)$ をとる。xy 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i)　P は原点 O と異なる。

(ii)　$\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii)　$\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。

第　2　問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1)　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha) = 0$ となるものを求めよ。

(2)　(1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば，$0.69 < \log 2 < 0.7$ であることを用いてよい。

第　3　問

座標平面上を次の規則 (i)，(ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i)　最初に，P は点 $(2,\ 1)$ にいる。

(ii)　ある時刻で P が点 $(a,\ b)$ にいるとき，その 1 秒後には P は

- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y = x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y = -x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし，(1) については，結論のみを書けばよい。

(1)　P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2,\ 1)$ にいる確率と，最初から n 秒後に P が点 $(-2,\ -1)$ にいる確率は等しいことを示せ。

(3)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2,\ 1)$ にいる確率を求めよ。

第 4 問

$f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$ とおく。$0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心を持つ円を C_t とする。

(1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく。$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

(2) 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか。

第　5　問

座標空間内に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

第　6　問

2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x) = x^3 + 10x^2 + 20x$ とする。$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2)　a，b を整数の定数とし，$g(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とする。$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。