

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2023 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

- (1) 正の整数 k に対し,

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

- (2) 正の整数 n に対し,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ。

第 2 問

黒玉 3 個, 赤玉 4 個, 白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し, 取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし, 袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

- (1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。
- (2) どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

第 3 問

a を実数とし、座標平面上の点 $(0, a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

- (1) C が、不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。
- (2) a は (1) で求めた範囲にあるとする。 C のうち $x \geq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。 S 上の点 P に対し、点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_P とする。 $L_Q = L_R$ となる S 上の相異なる 2 点 Q, R が存在するような a の範囲を求めよ。

第 4 問

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 3)$ を考える。

- (1) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。
- (2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし, その垂線と直線 AB の交点を H とする。 $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
- (3) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$ により定め, Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。 S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし, 三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面上にあり, 周とその内部からなるものとする。

第 5 問

整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える。

- (1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし、 $g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。
 $g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。
- (2) a, b を実数とし、 $h(x) = x^2 + ax + b$ とおく。 $h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき、 $h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。 $h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ。

第 6 問

O を原点とする座標空間において、不等式 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち、 $z < 1$ を満たす部分を S とする。

以下、座標空間内の 2 点 A, B が一致するとき、線分 AB は点 A を表すものとし、その長さを 0 と定める。

- (1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき、点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $OP \leq \sqrt{3}$

- (ii) 線分 OP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。

- (2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき、点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(iii) $ON + NP \leq \sqrt{3}$

- (iv) 線分 ON と S は共有点を持たない。

- (v) 線分 NP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。