

入学試験過去問題  
数 学

東京大学（理科）

対象年度：2023年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

(1) 正の整数  $k$  に対し,

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数  $n$  に対し,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 2 問

黒玉 3 個, 赤玉 4 個, 白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し, 取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし, 袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

- (1) どの赤玉も隣り合わない確率  $p$  を求めよ。
- (2) どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率  $q$  を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

### 第 3 問

$a$  を実数とし、座標平面上の点  $(0, a)$  を中心とする半径 1 の円の周を  $C$  とする。

- (1)  $C$  が、不等式  $y > x^2$  の表す領域に含まれるような  $a$  の範囲を求めよ。
- (2)  $a$  は (1) で求めた範囲にあるとする。 $C$  のうち  $x \geq 0$  かつ  $y < a$  を満たす部分を  $S$  とする。 $S$  上の点  $P$  に対し、点  $P$  での  $C$  の接線が放物線  $y = x^2$  によって切り取られてできる線分の長さを  $L_P$  とする。 $L_Q = L_R$  となる  $S$  上の相異なる 2 点  $Q, R$  が存在するような  $a$  の範囲を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 4 問

座標空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(1, 2, 3)$  を考える。

- (1)  $\vec{OP} \perp \vec{OA}$ ,  $\vec{OP} \perp \vec{OB}$ ,  $\vec{OP} \cdot \vec{OC} = 1$  を満たす点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 点  $P$  から直線  $AB$  に垂線を下ろし, その垂線と直線  $AB$  の交点を  $H$  とする。 $\vec{OH}$  を  $\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  を用いて表せ。
- (3) 点  $Q$  を  $\vec{OQ} = \frac{3}{4}\vec{OA} + \vec{OP}$  により定め,  $Q$  を中心とする半径  $r$  の球面  $S$  を考える。 $S$  が三角形  $OHB$  と共有点を持つような  $r$  の範囲を求めよ。ただし, 三角形  $OHB$  は 3 点  $O, H, B$  を含む平面上にあり, 周とその内部からなるものとする。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 5 問

整式  $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)$  を考える。

- (1)  $g(x)$  を実数を係数とする整式とし,  $g(x)$  を  $f(x)$  で割った余りを  $r(x)$  とおく。  
 $g(x)^7$  を  $f(x)$  で割った余りと  $r(x)^7$  を  $f(x)$  で割った余りが等しいことを示せ。
- (2)  $a, b$  を実数とし,  $h(x) = x^2 + ax + b$  とおく。 $h(x)^7$  を  $f(x)$  で割った余りを  $h_1(x)$  とおき,  $h_1(x)^7$  を  $f(x)$  で割った余りを  $h_2(x)$  とおく。 $h_2(x)$  が  $h(x)$  に等しくなるような  $a, b$  の組をすべて求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 6 問

O を原点とする座標空間において、不等式  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ ,  $|z| \leq 1$  の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち、 $z < 1$  を満たす部分を  $S$  とする。

以下、座標空間内の 2 点 A, B が一致するとき、線分 AB は点 A を表すものとし、その長さを 0 と定める。

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき、点 P が動きうる範囲  $V$  の体積を求めよ。

(i)  $OP \leq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と  $S$  は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき、点 P が動きうる範囲  $W$  の体積を求めよ。必要ならば、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  を満たす実数  $\alpha$

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$  を用いてよい。

(iii)  $ON + NP \leq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と  $S$  は共有点を持たない。

(v) 線分 NP と  $S$  は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)