

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：2022年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = (\cos x) \log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t) \log(\cos t) dt \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

- (1) $f(x)$ は区間 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ。
- (2) $f(x)$ の区間 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき, a_n は 5 の倍数となることを示せ。
- (2) k, n を正の整数とする。 a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k, n を用いて表せ。
- (3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。

第 3 問

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $S(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$ に対し、点 S が点 T から十分離れているとは、

$$|x_1 - x_2| \geq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3$$

が表す正方形の領域を D とし、その 2 つの頂点 $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ を考える。さらに、次の条件 (i), (ii) をともに満たす点 P をとる。

(i) 点 P は領域 D の点であり、かつ、放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii) 点 P は、3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件 (iii), (iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。

(iv) 点 Q は、4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている。

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

第 4 問

座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 - x$$

を考える。

- (1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。
 - (i) 点 P を通る直線 l で、曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。
- (2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
 - (ii) 点 P を通る直線 l で、曲線 C と相異なる 3 点で交わり、かつ、直線 l と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

第 5 問

座標空間内の点 $A(0, 0, 2)$ と点 $B(1, 0, 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。 S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $PQ = 2$ を満たしながら動くとき、線分 PQ の中点 M が通過する範囲を K とする。 K の体積を求めよ。

第 6 問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して、ベクトル \vec{v}_k を

$$\vec{v}_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{3}, \sin \frac{2k\pi}{3} \right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて、座標平面上に点 $X_0, X_1, X_2, \dots, X_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

- (i) X_0 は O にある。
- (ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。 X_{n-1} が定まったとし、 X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合、

$$\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{OX_{n-1}} + \vec{v}_k$$

により X_n を定める。ただし、 k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合、 X_n を X_{n-1} と定める。

- (1) $N = 8$ とする。 X_8 が O にある確率を求めよ。
- (2) $N = 200$ とする。 X_{200} が O にあり、かつ、合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0 \leq r \leq 200$ である。 p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。