入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2020 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

$a,\ b,\ c,\ p$ を実数とする。不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$bx^2 + cx + a > 0$$
$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x > p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1) $a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上であることを示せ。

(2) $a,\ b,\ c$ のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3) $p = 0$ であることを示せ。

第　2　問

平面上の点 P，Q，R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す。また，P，Q，R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR} = 0$ とする。

A，B，C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC} = 1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX} + \triangle\mathrm{BCX} + \triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。

第　3　問

$-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$
$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}\,(x(t),\ y(t))$ を考える。

(1)　$-1 < t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。

(2)　原点と P の距離を $f(t)$ とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ。

(3)　t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ。

第 4 問

$n,\ k$ を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を $n,\ k$ で表せ。

第　5　問

座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 A $(1,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1)　点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z = 1$ による S の切り口および，平面 $z = 1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2)　点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

第 6 問

以下の問いに答えよ。

(1) $A,\ \alpha$ を実数とする。θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$$

を考える。$A > 1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解を持つことを示せ。

(2) 座標平面上の楕円

$$C:\quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える。また，$0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r $(0 < r < 1)$ が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件： C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。