

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2019 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

第 2 問

一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり, 3 点 A, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

$\frac{DR}{AQ}$ の最大値, 最小値を求めよ。

第 3 問

座標空間内に 5 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-2, 0, 0)$, $D(0, -2, 0)$, $E(0, 0, -2)$ を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り、直線 AE に平行な平面を α とする。さらに、 p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし、点 $P(p, 0, 2)$ を考える。

- (1) 八面体 $PABCDE$ の平面 $y = 0$ による切り口および、平面 α の平面 $y = 0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 八面体 $PABCDE$ の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。
- (3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする。八面体 $PABCDE$ の平面 α による切り口のうち $y \geq 0$, $z \geq 0$ の部分を点 (x, y, z) が動くとき、座標平面上で点 (y, z) が動く範囲の面積を求めよ。

第 4 問

n を 1 以上の整数とする。

- (1) $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 d_n を求めよ。
- (2) $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

第 5 問

以下の問いに答えよ。

- (1) n を 1 以上の整数とする。 x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は、ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

- (2) (1) で定まる a_n に対し、 $\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

- (3) (1) で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ に対し、

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ。

第 6 問

複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ および実数 a, b が、次の 3 条件をみたしながら動く。

条件 1 : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は相異なる。

条件 2 : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である。

条件 3 : 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり、虚部は 0 ではない。

- (1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち、ちょうど 2 つが実数であり、残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。
- (2) b を a で表せ。
- (3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。