入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2018 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第　1　問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \qquad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり，$x \to +0,\ x \to \pi - 0$ のときの極限を調べよ。

第　2　問

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　$n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2)　a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

第　3　問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。$k > 0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k \to +0} S(k)$，$\displaystyle\lim_{k \to \infty} S(k)$ を求めよ。

第 4 問

$a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件１： 方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件２： さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w = \dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。

第 6 問

座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\,(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}\,(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}\,(1,\ 1,\ 1)$ を考える。$\dfrac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

(1) 平面 $y = t$ が V_1, V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに，この範囲の t に対し，平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。

(3) r は (2) の条件をみたすとする。V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする。S と T を求め，V の体積を決定せよ。