

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：2017年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

## 第 1 問

実数  $a, b$  に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta$$

とし,  $0 < \theta < \pi$  で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1}$$

を考える。

- (1)  $f(\theta)$  と  $g(\theta)$  を  $x = \cos \theta$  の整式で表せ。
- (2)  $g(\theta)$  が  $0 < \theta < \pi$  の範囲で最小値 0 をとるための  $a, b$  についての条件を求めよ。  
また, 条件をみたす点  $(a, b)$  が描く図形を座標平面上に図示せよ。

## 第 2 問

座標平面上で  $x$  座標と  $y$  座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点  $P$  を考える。

- (a) 最初に、点  $P$  は原点  $O$  にある。
  - (b) ある時刻で点  $P$  が格子点  $(m, n)$  にあるとき、その 1 秒後の点  $P$  の位置は、隣接する格子点  $(m+1, n)$ ,  $(m, n+1)$ ,  $(m-1, n)$ ,  $(m, n-1)$  のいずれかであり、また、これらの点に移動する確率は、それぞれ  $\frac{1}{4}$  である。
- (1) 点  $P$  が、最初から 6 秒後に直線  $y = x$  上にある確率を求めよ。
  - (2) 点  $P$  が、最初から 6 秒後に原点  $O$  にある確率を求めよ。

### 第 3 問

複素数平面上の原点以外の点  $z$  に対して、 $w = \frac{1}{z}$  とする。

- (1)  $\alpha$  を 0 でない複素数とし、点  $\alpha$  と原点  $O$  を結ぶ線分の垂直二等分線を  $L$  とする。点  $z$  が直線  $L$  上を動くとき、点  $w$  の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
- (2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを  $\beta$  とする。点  $\beta$  と点  $\beta^2$  を結ぶ線分上を点  $z$  が動くときの点  $w$  の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

## 第 4 問

$p = 2 + \sqrt{5}$  とおき, 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

- (1)  $a_1, a_2$  の値を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  とする。積  $a_1 a_n$  を,  $a_{n+1}$  と  $a_{n-1}$  を用いて表せ。
- (3)  $a_n$  は自然数であることを示せ。
- (4)  $a_{n+1}$  と  $a_n$  の最大公約数を求めよ。

## 第 5 問

$k$  を実数とし、座標平面上で次の 2 つの放物線  $C$ ,  $D$  の共通接線について考える。

$$C: y = x^2 + k$$

$$D: x = y^2 + k$$

- (1) 直線  $y = ax + b$  が共通接線であるとき、 $a$  を用いて  $k$  と  $b$  を表せ。ただし  $a \neq -1$  とする。
- (2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように  $k$  の値を定める。このとき、共通接線が 3 本存在することを示し、それらの傾きと  $y$  切片を求めよ。

## 第 6 問

点  $O$  を原点とする座標空間内で、一辺の長さが  $1$  の正三角形  $OPQ$  を動かす。また、点  $A(1, 0, 0)$  に対して、 $\angle AOP$  を  $\theta$  とおく。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。

- (1) 点  $Q$  が  $(0, 0, 1)$  にあるとき、点  $P$  の  $x$  座標がとりうる値の範囲と、 $\theta$  がとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 点  $Q$  が平面  $x = 0$  上を動くとき、辺  $OP$  が通過しうる範囲を  $K$  とする。 $K$  の体積を求めよ。