

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2016 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

e を自然対数の底, すなわち $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

第 2 問

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方で試合を行い、2 連勝したチームが出た時点で、そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する。
- (b) 2 試合目で、1 試合目の勝者と、1 試合目で待機していた C が対戦する。
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は、 k 試合目の勝者と、 k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお、すべての対戦において、それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で、引き分けはないものとする。

- (1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき、A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

第 3 問

a を $1 < a < 3$ をみたす実数とし、座標空間内の 4 点 $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 3)$, $Q(0, 0, a)$ を考える。直線 P_1Q , P_2Q , P_3Q と xy 平面の交点をそれぞれ R_1 , R_2 , R_3 として、三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を最小にする a と、そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

第 4 問

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。

第 5 問

k を整数とし、10進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで、 a_1, a_2, \dots, a_k は 0 から 9 までの整数で、 $a_k \neq 0$ とする。

- (1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

- (2) p が $5 \cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば、次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

- (3) 実数 x に対し、 $r \leq x < r + 1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。 $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

第 6 問

座標空間内を、長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a), (b) をみたしながら動く。

- (a) 点 A は平面 $z = 0$ 上にある。
- (b) 点 C(0, 0, 1) が線分 AB 上にある。

このとき、線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。 K と不等式 $z \geq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。