

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2014 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

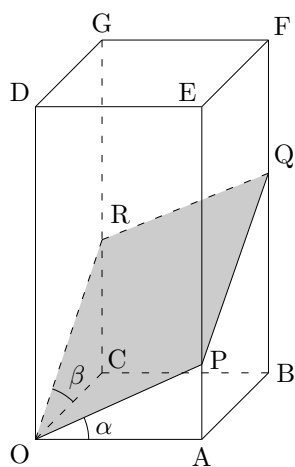
配点： 120 点

第 1 問

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 $OABC-DEFG$ を考える。3 点 P , Q , R を、それぞれ辺 AE , 辺 BF , 辺 CG 上に、4 点 O , P , Q , R が同一平面上にあるようにとる。四角形 $OPQR$ の面積を S とおく。また、 $\angle AOP$ を α , $\angle COR$ を β とおく。

(1) S を $\tan \alpha$ と $\tan \beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $S = \frac{7}{6}$ であるとき、 $\tan \alpha + \tan \beta$ の値を求めよ。さらに、 $\alpha \leq \beta$ のとき、 $\tan \alpha$ の値を求めよ。



第 2 問

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して、次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し、

(i) 取り出した球が白球のときは、袋 U の中身が白球 a 個、赤球 1 個となるようにする。

(ii) 取り出した球が赤球のときは、その球を袋 U へ戻すことなく、袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に、白球が $a + 2$ 個、赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う。

たとえば、1 回目の操作で白球が出たとすると、袋 U の中身は白球 a 個、赤球 1 個となり、さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると、袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし、袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) $n \geq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n$ を求めよ。

第 3 問

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1: y = -x^2 + 1$$

$$C_2: y = (x - u)^2 + u$$

を考える。 C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は、ある実数 a, b により、 $a \leq u \leq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leq u \leq b$ をみたすとき、 C_1 と C_2 の共有点を $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ とする。ただし、共有点が 1 点のみのときは、 P_1 と P_2 は一致し、ともにその共有点を表すとする。

$$2|x_1y_2 - x_2y_1|$$

を u の式で表せ。

(3) (2) で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分

$$I = \int_a^b f(u) du$$

を求めよ。

第 4 問

p, q は実数の定数で, $0 < p < 1, q > 0$ をみたすとする。関数

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば, 不等式 $1+x \leq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

- (1) $0 < x < 1$ のとき, $0 < f(x) < 1$ であることを示せ。
- (2) x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を,

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める。 $p > q$ であるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

となることを示せ。

- (3) $p < q$ であるとき,

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

第 5 問

r を 0 以上の整数とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、素数 p を 1 つとり、 a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし、0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し、 b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r = 2$, $p = 17$ の場合に、10 以下のすべての自然数 n に対して、 b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して、

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき、 $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) $a_2, a_3, a_4, \dots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき、 a_1 も p で割り切れないことを示せ。

第 6 問

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と、線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-2 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が、線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき、線分 PQ の通過する領域を D とする。

- (1) s を $0 \leq s \leq 2$ とみたす実数とすると、点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。
- (2) D を図示せよ。