

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2013 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

実数 a, b に対し平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。このとき、次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

(i) $P_0 = P_6$

(ii) $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ は相異なる。

第 2 問

a を実数とし, $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$
$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

第 3 問

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与える、A はコインを B に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与える、B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば、コインが表、裏、表、表と出た場合、この時点で A は 1 点、B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

- (1) A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

第 4 問

$\triangle ABC$ において $\angle BAC = 90^\circ$, $|\vec{AB}| = 1$, $|\vec{AC}| = \sqrt{3}$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点 P が

$$\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|} + \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|} = \vec{0}$$

を満たすとする。

- (1) $\angle APB$, $\angle APC$ を求めよ。
- (2) $|\vec{PA}|$, $|\vec{PB}|$, $|\vec{PC}|$ を求めよ。

第 5 問

次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する。

- (a) A は連続する 3 つの自然数の積である。
- (b) A を 10 進法で表したとき, 1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

- (1) y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3 + (3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

- (2) 命題 P を証明せよ。

第 6 問

座標空間において、 xy 平面内で不等式 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を、直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1 , 直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

- (1) $0 \leq t < 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。
- (2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。