入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2012 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第　1　問

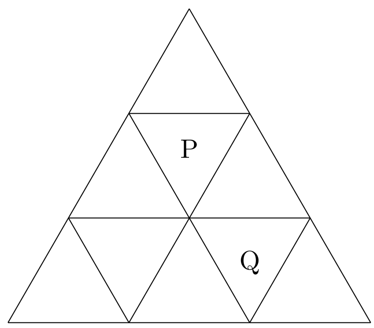
次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2 + (y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値をとるとき，x 軸と ℓ のなす角 θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

第　2　問

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



第　3　問

座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

第　4　問

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

第　5　問

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D)　A の成分 a, b, c, d は整数である。また, 平面上の 4 点 $(0,\ 0)$, $(a,\ b)$, $(a+c,\ b+d)$, $(c,\ d)$ は，面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2)　$c=0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3)　$|\,a\,| \geqq |\,c\,| > 0$ とする。BA, $B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は, それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|\,x\,|+|\,z\,|<|\,a\,|+|\,c\,|$$

を満たすことを示せ。

第　6　問

2×2 行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(P) = p + s$$

と定める。

　a，b，c は $a \geqq b > 0$，$0 \leqq c \leqq 1$ を満たす実数とする。行列 A，B，C，D を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数 x に対し $U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。

　このとき以下の問いに答えよ。

(1)　各実数 t に対して，x の関数

$$f(x) = \mathrm{Tr}\left(\Big(U(t)AU(-t) - B \Big) U(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(-x) \right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ。（ただし，最大値をとる x を求める必要はない。）

(2)　すべての実数 t に対し

$$2\,\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つことを示せ。