入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2011 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第　1　問

座標平面において，点 P$(0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし，直線 $y = a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする。

(1)　$\triangle$PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。

第　2　問

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める。

$$\text{(i)} \quad a_1 = \langle a \rangle$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} a_n \fallingdotseq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。

第　3　問

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}\,(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}\,(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1)　$u(t)$，$v(t)$ を求めよ。

(2)　$0 < a < 1$ の範囲の実数 a に対し，積分

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。

第　4　問

座標平面上の 1 点 P $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 Q $\left(\alpha,\ \alpha^2\right)$，R $\left(\beta,\ \beta^2\right)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 G $(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

第　5　問

$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[\,a,\ b\ ;\ c\,]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[\,a,\ b\ ;\ c\,]$ に対して

$$w([\,a,\ b\ ;\ c\,]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([\,a,\ b\ ;\ c\,]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([\,a,\ b\ ;\ c\,]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([\,a,\ b\ ;\ c\,]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。

第 6 問

(1) x, y を実数とし，$x > 0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t) = xt^2 + yt$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x > 0$ かつ，実数 z で $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して

$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3) 次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

$0 \leqq x \leqq 1$ かつ，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して，

$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

が成り立つ。

V の体積を求めよ。