入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2010 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第　1　問

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

第　2　問

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx < \frac{1}{2k}$$

(2)　$m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

第　3　問

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (#) を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問 (1)，(2)，(3) に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。

第　4　問

Oを原点とする座標平面上の曲線

$$C:\quad y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる2点 $\mathrm{P}_1\,(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2\,(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　$\mathrm{P}_i\,(i=1,2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ $\mathrm{H}_i\,(i=1,2)$ とする。このとき $\triangle\mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle\mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P_1O}$，$\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

第 5 問

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P，Q，R の速さは，それぞれ m，1，2 であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ をみたす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

第　6　問

四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA} = 3$，$\mathrm{OB} = \sqrt{7}$，$\mathrm{AB} = 2$ であるとする。また，3 点 O，A，B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $0 < t < 1$ をみたす実数 t に対して，線分 OA，OB 各々を $t : 1 - t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2 点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。