

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2009 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

自然数 $m \geq 2$ に対し, $m - 1$ 個の二項係数

$${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$$

を考え, これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

- (1) m が素数ならば, $d_m = m$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ が d_m で割り切れることを, k に関する数学的帰納法によって示せ。
- (3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

第 2 問

実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとする。

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。

第 3 問

スイッチを 1 回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が 1 個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

- (A) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。
 - (B) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。
 - (C) 1 回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあればその玉を R に入れる。
- (1) L と R は空であるとする。操作 (A) を 5 回おこない、さらに操作 (B) を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。
 - (2) L と R は空であるとする。操作 (C) を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。
 - (3) L と R は空であるとする。操作 (C) を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

第 4 問

a を正の実数とし、空間内の 2 つの円板

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a\},$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a\}$$

を考える。 D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。 E の体積を $V(a)$ とし、 E と $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

- (1) $W(a)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

第 5 問

- (1) 実数 x が $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ をみたすとき, 次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

- (2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

第 6 問

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle A_1 A_2 A_3$ がある。 $\triangle A_1 A_2 A_3$ の内部に 3 点 B_1, B_2, B_3 を、 $d(A_n, B_n) = 1$ ($n = 1, 2, 3$) となるようにとる。また、

$$\begin{aligned}\vec{a_1} &= \overrightarrow{A_1 A_2}, & \vec{a_2} &= \overrightarrow{A_2 A_3}, & \vec{a_3} &= \overrightarrow{A_3 A_1} \\ \vec{e_1} &= \overrightarrow{A_1 B_1}, & \vec{e_2} &= \overrightarrow{A_2 B_2}, & \vec{e_3} &= \overrightarrow{A_3 B_3}\end{aligned}$$

とおく。 $n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して、時刻 0 に A_n を出発し、 $\vec{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え、時刻 t におけるその位置を $P_n(t)$ と表すことにする。

- (1) ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成立した。ベクトル $\vec{e_1} - \vec{e_2}$ と、ベクトル $\vec{a_1}$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$ となることを示せ。
- (2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle B_1 A_1 A_2, \theta_2 = \angle B_2 A_2 A_3, \theta_3 = \angle B_3 A_3 A_1$ によって定義する。 α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin \alpha = \frac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1) と同じ仮定のもとで、 $\theta_1 + \theta_2$ の値のとり範囲を α を用いて表せ。
- (3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて、次が成立した。

$$d(P_2(t_1), P_3(t_1)) \leq 1, \quad d(P_3(t_2), P_1(t_2)) \leq 1, \quad d(P_1(t_3), P_2(t_3)) \leq 1$$

このとき、時刻 $T = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(P_1(T), O) \leq 3, \quad d(P_2(T), O) \leq 3, \quad d(P_3(T), O) \leq 3$$

が成立することを示せ。

