

# 入 学 試 験 問 題



## 数 学 (理科)

(配点 120 点)

2009 年度 試験時間 150 分

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 1 問

自然数  $m \geq 2$  に対し,  $m - 1$  個の二項係数

$${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$$

を考え, これらすべての最大公約数を  $d_m$  とする。すなわち  $d_m$  はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

- (1)  $m$  が素数ならば,  $d_m = m$  であることを示せ。
- (2) すべての自然数  $k$  に対し,  $k^m - k$  が  $d_m$  で割り切れることを,  $k$  に関する数学的帰納法によって示せ。
- (3)  $m$  が偶数のとき  $d_m$  は 1 または 2 であることを示せ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 2 問

実数を成分にもつ行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と実数  $r, s$  が下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとする。

(i)  $s > 1$

(ii)  $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii)  $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$  とするとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき以下の問に答えよ。

(1)  $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を  $a, c, r, s$  を用いて表せ。

(2)  $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$  とするとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$  を示せ。

(3)  $c = 0$  かつ  $|a| < 1$  を示せ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

### 第 3 問

スイッチを1回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が1個、等確率  $\frac{1}{4}$  で出てくる機械がある。2つの箱 L と R を用意する。次の3種類の操作を考える。

- (A) 1回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。
  - (B) 1回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。
  - (C) 1回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあればその玉を R に入れる。
- (1) L と R は空であるとする。操作 (A) を5回おこない、さらに操作 (B) を5回おこなう。このとき L にも R にも4色すべての玉が入っている確率  $P_1$  を求めよ。
  - (2) L と R は空であるとする。操作 (C) を5回おこなう。このとき L に4色すべての玉が入っている確率  $P_2$  を求めよ。
  - (3) L と R は空であるとする。操作 (C) を10回おこなう。このとき L にも R にも4色すべての玉が入っている確率を  $P_3$  とする。 $\frac{P_3}{P_1}$  を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 4 問

$a$  を正の実数とし、空間内の 2 つの円板

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a\},$$
$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a\}$$

を考える。 $D_1$  を  $y$  軸の回りに  $180^\circ$  回転して  $D_2$  に重ねる。ただし回転は  $z$  軸の正の部分  $x$  軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に  $D_1$  が通る部分を  $E$  とする。 $E$  の体積を  $V(a)$  とし、 $E$  と  $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$  との共通部分の体積を  $W(a)$  とする。

(1)  $W(a)$  を求めよ。

(2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$  を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 5 問

- (1) 実数  $x$  が  $-1 < x < 1$ ,  $x \neq 0$  をみたすとき, 次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

- (2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 6 問

平面上の 2 点  $P, Q$  の距離を  $d(P, Q)$  と表すことにする。平面上に点  $O$  を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形  $\triangle A_1A_2A_3$  がある。 $\triangle A_1A_2A_3$  の内部に 3 点  $B_1, B_2, B_3$  を,  $d(A_n, B_n) = 1$  ( $n = 1, 2, 3$ ) となるようにとる。また,

$$\begin{aligned}\vec{a_1} &= \overrightarrow{A_1A_2}, & \vec{a_2} &= \overrightarrow{A_2A_3}, & \vec{a_3} &= \overrightarrow{A_3A_1} \\ \vec{e_1} &= \overrightarrow{A_1B_1}, & \vec{e_2} &= \overrightarrow{A_2B_2}, & \vec{e_3} &= \overrightarrow{A_3B_3}\end{aligned}$$

とおく。 $n = 1, 2, 3$  のそれぞれに対して, 時刻 0 に  $A_n$  を出発し,  $\vec{e_n}$  の向きに速さ 1 で直進する点を考え, 時刻  $t$  におけるその位置を  $P_n(t)$  と表すことにする。

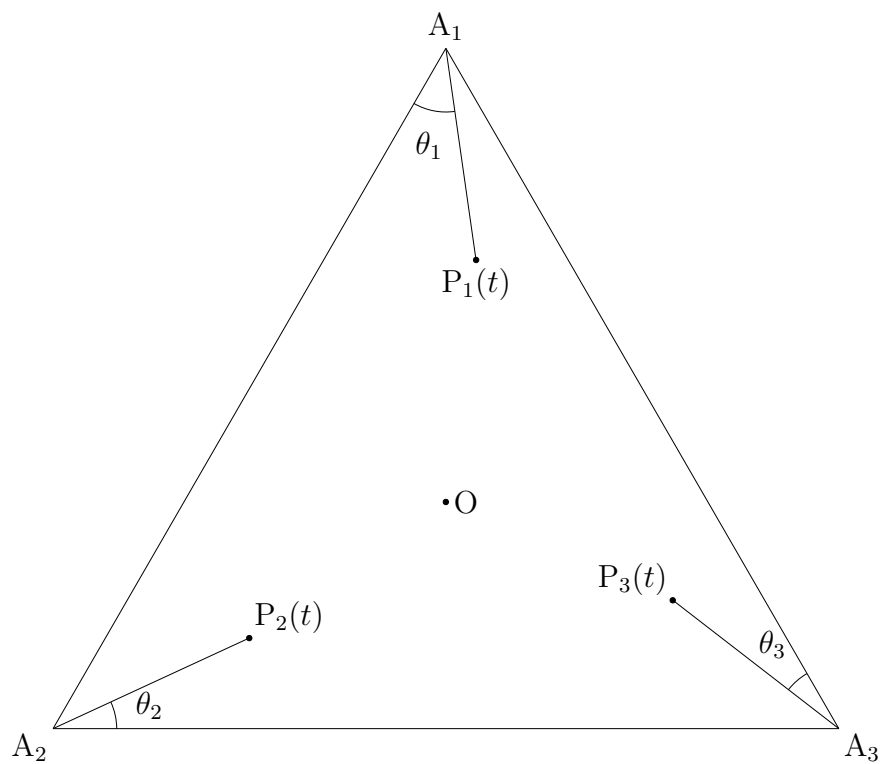
- (1) ある時刻  $t$  で  $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$  が成立した。ベクトル  $\vec{e_1} - \vec{e_2}$  と, ベクトル  $\vec{a_1}$  とのなす角度を  $\theta$  とおく。このとき  $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$  となることを示せ。
- (2) 角度  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  を  $\theta_1 = \angle B_1A_1A_2, \theta_2 = \angle B_2A_2A_3, \theta_3 = \angle B_3A_3A_1$  によって定義する。 $\alpha$  を  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  かつ  $\sin \alpha = \frac{1}{1000}$  をみたす実数とする。(1) と同じ仮定のもとで,  $\theta_1 + \theta_2$  の値のとりうる範囲を  $\alpha$  を用いて表せ。
- (3) 時刻  $t_1, t_2, t_3$  のそれぞれにおいて, 次が成立した。

$$d(P_2(t_1), P_3(t_1)) \leq 1, \quad d(P_3(t_2), P_1(t_2)) \leq 1, \quad d(P_1(t_3), P_2(t_3)) \leq 1$$

このとき, 時刻  $T = \frac{1000}{\sqrt{3}}$  において同時に

$$d(P_1(T), O) \leq 3, \quad d(P_2(T), O) \leq 3, \quad d(P_3(T), O) \leq 3$$

が成立することを示せ。



# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)







