

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：2008年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

## 第 1 問

座標平面の点  $(x, y)$  を  $(3x + y, -2x)$  へ移す移動  $f$  を考え, 点  $P$  が移る行き先を  $f(P)$  と表す。  $f$  を用いて直線  $l_0, l_1, l_2, \dots$  を以下のように定める。

- $l_0$  は直線  $3x + 2y = 1$  である。
- 点  $P$  が  $l_n$  上を動くとき,  $f(P)$  が描く直線を  $l_{n+1}$  とする ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )。

以下  $l_n$  を 1 次式を用いて  $a_n x + b_n y = 1$  と表す。

- (1)  $a_{n+1}, b_{n+1}$  を  $a_n, b_n$  で表せ。
- (2) 不等式  $a_n x + b_n y > 1$  が定める領域を  $D_n$  とする。  $D_0, D_1, D_2, \dots$  すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

## 第 2 問

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち  $k$  枚のカードを手もとにもっているとき、次の操作 (A) を考える。

- (A) 手持ちの  $k$  枚の中から 1 枚を、等確率  $\frac{1}{k}$  で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問 (1), (2) に答えよ。

- (1) 最初に白 2 枚, 黒 2 枚, 合計 4 枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を  $n$  回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。
- (2) 最初に白 3 枚, 黒 3 枚, 合計 6 枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を  $n$  回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

### 第 3 問

- (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。
- (2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり、それぞれの面の重心を  $G_1$ ,  $G_2$  とする。 $G_1$ ,  $G_2$  を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部を含むものとし、各辺の長さは 1 とする。

## 第 4 問

放物線  $y = x^2$  上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の  $y$  座標を  $h$  とする。

- (1) 線分 PQ の長さ  $L$  と傾き  $m$  で,  $h$  を表せ。
- (2)  $L$  を固定したとき,  $h$  がとりうる値の最小値を求めよ。

## 第 5 問

自然数  $n$  に対し、 $\frac{10^n - 1}{9} = \overbrace{111 \cdots 111}^{n \text{ 個}}$  を  $\boxed{n}$  で表す。たとえば  $\boxed{1} = 1$ ,  $\boxed{2} = 11$ ,  $\boxed{3} = 111$  である。

- (1)  $m$  を 0 以上の整数とする。 $\boxed{3^m}$  は  $3^m$  で割り切れるが、 $3^{m+1}$  では割り切れないことを示せ。
- (2)  $n$  が 27 で割り切れることが、 $\boxed{n}$  が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

## 第 6 問

座標平面において、媒介変数  $t$  を用いて

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。