

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：2007年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

n と k を正の整数とし、 $P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば、 $P(x)$ の n 次以下の項の係数は、すべて整数であることを示せ。ただし、定数項については、項それ自身を係数とみなす。

第 2 問

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O, P_0, P_1, \dots, P_n があり, 次の 2 つの条件をみたしている。

① $\angle P_{k-1}OP_k = \frac{\pi}{n}$ ($1 \leq k \leq n$), $\angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_0P_1$ ($2 \leq k \leq n$)

② 線分 OP_0 の長さは 1, 線分 OP_1 の長さは $1 + \frac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ を求めよ。

第 3 問

座標平面上の 2 点 P, Q が, 曲線 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を自由に動くとき, 線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし, $P = Q$ のときは $R = P$ とする。

- (1) a を $-1 \leq a \leq 1$ をみたす実数とすると, 点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。
- (2) D を図示せよ。

第 4 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 a に対し、2 次の正方行列 A, P, Q が、5 つの条件 $A = aP + (a + 1)Q$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = O$, $QP = O$ をみたすとする。ただし、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき、 $(P + Q)A = A$ が成り立つことを示せ。
- (2) a は正の数として、行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a + 1 \end{pmatrix}$ を考える。この A に対し、(1) の 5 つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ。
- (3) n を 2 以上の整数とし、 $2 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対して $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k + 1 \end{pmatrix}$ とおく。行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ。

第 5 問

表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0 < p < 1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール (R) の下で, ブロック積みゲームを行う。

$$(R) \begin{cases} \textcircled{1} & \text{ブロックの高さは, 最初は 0 とする。} \\ \textcircled{2} & \text{硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ,} \\ & \text{裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。} \end{cases}$$

n を正の整数, m を $0 \leq m \leq n$ をみたす整数とする。

- (1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。
- (2) (1) で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。
- (3) ルール (R) の下で, n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

第 6 問

以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < a$ をみたす実数 x, a に対し, 次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

- (2) (1) を利用して, 次を示せ。

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし, $\log 2$ は 2 の自然対数を表す。