

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2006 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

O を原点とする座標平面上の 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 で, 条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_{n+1}} = \frac{3}{2} \overrightarrow{OP_n} \quad (n = 2, 3)$$

を満たすものを考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) P_1, P_2 が曲線 $xy = 1$ 上にあるとき, P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。
- (2) P_1, P_2, P_3 が円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるとき, P_4 もこの円周上にあることを示せ。

第 2 問

コンピュータの画面に、記号 $\bigcirc$ と $\times$ のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は、それまでの経過に関係なく、 p であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号 $\times$ が表示された。操作をくり返し行い、記号 $\times$ が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に、記号 $\bigcirc$ が n 個出る確率を P_n とする。ただし、記号 $\bigcirc$ が n 個出た段階で操作は終了する。

- (1) P_2 を p で表せ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 P_n を p と n で表せ。

第 3 問

O を原点とする座標平面上に、 y 軸上の点 $P(0, p)$ と、直線 $m: y = (\tan \theta)x$ が与えられている。ここで、 $p > 1$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

いま、傾きが α の直線 ℓ を対称軸とする対称移動を行うと、原点 O は直線 $y = 1$ 上の、第 1 象限の点 Q に移り、 y 軸上の点 P は直線 m 上の、第 1 象限の点 R に移った。

(1) このとき、 $\tan \theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し、そのときの p の値を求めよ。

条件： どのような θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) に対しても、原点を通り直線 ℓ に垂直な直線
は $y = \left(\tan \frac{\theta}{3}\right)x$ となる。

第 4 問

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。

条件 (A)： x, y, z は正の整数で、 $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leq y \leq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

- (1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で、 $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ。
- (2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする。このとき、組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ。
- (3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は、無数に存在することを示せ。

第 5 問

$a_1 = \frac{1}{2}$ とし、数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。 $n > 1$ のとき、 $b_n > 2n$ となることを示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。

第 6 問

$x > 0$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は、実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。すなわち、任意の実数 a に対して、 $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y = g(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする。このとき、定積分 $\int_8^{27} g(x) dx$ を求めよ。