

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：2005年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

## 第 1 問

$x > 0$  に対し  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  とする。

(1)  $n = 1, 2, \dots$  に対し  $f(x)$  の第  $n$  次導関数は、数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を用いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し、 $a_n$ ,  $b_n$  に関する漸化式を求めよ。

(2)  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  とおく。  $h_n$  を用いて  $a_n$ ,  $b_n$  の一般項を求めよ。

## 第 2 問

$|z| > \frac{5}{4}$  となるどのような複素数  $z$  に対しても  $w = z^2 - 2z$  とは表されない複素数  $w$  全体の集合を  $T$  とする。すなわち、

$$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leq \frac{5}{4} \right\}$$

とする。このとき、 $T$  に属する複素数  $w$  で絶対値  $|w|$  が最大になるような  $w$  の値を求めよ。

### 第 3 問

関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$$

とする。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $x > \frac{1}{2}$  ならば  $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$  であることを示せ。
- (2)  $x_0$  を正の数とするとき、数列  $\{x_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) を、 $x_{n+1} = f(x_n)$  によって定める。 $x_0 > \frac{1}{2}$  であれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

であることを示せ。

#### 第 4 問

3 以上 9999 以下の奇数  $a$  で,  $a^2 - a$  が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

## 第 5 問

$N$  を 1 以上の整数とする。数字  $1, 2, \dots, N$  が書かれたカードを 1 枚ずつ、計  $N$  枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

- (i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を  $a$  とする。ひいたカードはもとに戻す。
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を  $b$  とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b = 0$  とする。 $a + b > N$  の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iii)  $a + b \leq N$  の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を  $c$  とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a + b < c$  の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iv)  $a + b \geq c$  の場合は、乙はもう 1 回カードをひく。そのカードに書かれた数を  $d$  とする。 $a + b < c + d \leq N$  の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 $a$  の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を  $a$  を用いて表せ。
- (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を  $a$  を用いて表せ。

ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。

## 第 6 問

$r$  を正の実数とする。 $xyz$  空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$y^2 + z^2 \geq r^2$$

$$z^2 + x^2 \leq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。