入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2003 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第　1　問

a，b，c を実数とし，$a \neq 0$ とする。
2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A)，(B) を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，

$$f(x) \leqq 3x^2 - 1$$

このとき，積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f'(x))^2 \, dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

第　2　問

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，

$$\frac{14\,(t-3)}{(1-i)\,t-7}$$

を表す点 P をとる。

(1)　∠APB を求めよ。

(2)　線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

第　3　問

xyz 空間において，平面 $z = 0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に，平面 $z = 0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z = 1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z = t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$t = 1 - \cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2)　C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。

第　4　問

2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2)　β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3)　α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

第　5　問

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1)　X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$$

を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

第　6　問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。