入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（理科）

対象年度： 2002 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第　1　問

2 つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}\,(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$$
$$y = -2\sqrt{3}\,(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$$

が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。

第　2　問

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを

$$a_n x + b_n$$

とおく。

(1)　数列 a_n，b_n，$n=1, 2, 3, \cdots$，は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2)　$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，a_n，b_n は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

第　3　問

xyz 空間内の原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 A$(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 P$(x,\ y,\ z)$ に対し，OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下した垂線の足をそれぞれ Q，R とする。このとき，

$$\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AR}$$

であるような点 P の動く範囲 V を求め，V の体積は 10 より小さいことを示せ。

第　4　問

a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}\,(0,\ a)$ をとる。関数

$$y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：　Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

第　5　問

O を原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$，$k\ =\ 0, 1, \cdots, n$，をとる。また，$z$ 軸上 $z \geqq 0$ の部分に，点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて，極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

を求めよ。

第 6 問

N を正の整数とする。$2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$$

を

$$\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし，b_i の次に a_i，a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また，数列 $\{1, 2, \cdots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において，数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば，$N = 3$ のとき，$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので，$f(1) = 2$，$f(2) = 4$，$f(3) = 6$，$f(4) = 1$，$f(5) = 3$，$f(6) = 5$ である。

(1) 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1 \leqq k \leqq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し，$f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れることを示せ。

(3) n を正の整数とし，$N = 2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1, 2, 3, \cdots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると，$\{1, 2, 3, \cdots, 2N\}$ にもどることを証明せよ。