

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

2002 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

2つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}(x - \cos \theta)^2 + \sin \theta$$

$$y = -2\sqrt{3}(x + \cos \theta)^2 - \sin \theta$$

が相異なる2点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

n は正の整数とする。 x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを

$$a_n x + b_n$$

とおく。

(1) 数列 $a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, a_n, b_n は共に正の整数で, 互いに素であることを証明せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とし、点 $A(0, 0, -1)$ を通る球面を S とする。 S の外側にある点 $P(x, y, z)$ に対し、 OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下した垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき、

$$PQ \leq AR$$

であるような点 P の動く範囲 V を求め、 V の体積は 10 より小さいことを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

a は正の実数とする。 xy 平面の y 軸上に点 $P(0, a)$ をとる。関数

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

のグラフを C とする。 C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $O(0, 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件： Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

O を原点とする xyz 空間に点 $P_k \left(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}, 0 \right)$, $k = 0, 1, \dots, n$, をとる。また, z 軸上 $z \geq 0$ の部分に, 点 Q_k を線分 $P_k Q_k$ の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $OP_k P_{k+1} Q_k$ の体積を V_k とおいて, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

N を正の整数とする。 $2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$$

を

$$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_N, a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし、 b_i の次に a_i 、 a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また、数列 $\{1, 2, \dots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において、数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば、 $N = 3$ のとき、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので、 $f(1) = 2$ 、 $f(2) = 4$ 、 $f(3) = 6$ 、 $f(4) = 1$ 、 $f(5) = 3$ 、 $f(6) = 5$ である。

- (1) 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。
- (2) $1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し、 $f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れることを示せ。
- (3) n を正の整数とし、 $N = 2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると、 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ にもどることを証明せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

