

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（理科）

対象年度： 2000 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 120 点

第 1 問

$AB = AC$, $BC = 2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し, ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

第 2 問

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を考える。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を通る直線を l , 原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする。ただし, 複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき,

「 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は, $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることである。」

を示せ。

第 3 問

$a > 0$ とする。正の整数 n に対して、区間 $0 \leq x \leq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{ 0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a, a \right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり、次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0) = c, \\ \frac{f_n((k+1)h) - f_n(kh)}{h} = \{1 - f_n(kh)\} f_n((k+1)h) \\ (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

ただし、 $h = \frac{a}{n}$ 、 $c > 0$ である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $p_k = \frac{1}{f_n(kh)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とおいて p_k を求めよ。
- (2) $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ とおく。 $g(a)$ を求めよ。
- (3) $c = 2, 1, \frac{1}{4}$ それぞれの場合について、 $y = g(x)$ の $x > 0$ でのグラフをかけ。

第 4 問

座標平面上を運動する 3 点 P, Q, R があり, 時刻 t における座標が次で与えられている。

$$P: \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$$

$$Q: \quad x = 1 - vt, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R: \quad x = 1 - vt, \quad y = 1$$

ただし, v は正の定数である。この運動において, 以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

- (1) 点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π の間まではぶつからない。
- (2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。

第 5 問

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字はたがいに異なり、どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない。」

ただし、 S の要素は 10 進法で表す。また、1 けたの正の整数は S に含まれるとする。

このとき次の問いに答えよ。

- (1) S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。
- (2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。

第 6 問

- (1) a, b, c を正の実数とするとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 x, y, z を a, b, c で表せ。

- (2) a, b, c が $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 2, 1 \leq c \leq 2$ の範囲を動くとき, (1) の x, y, z を座標とする点 (x, y, z) が描く立体を K とする。立体 K を平面 $y = t$ で切った切り口の面積を求めよ。
- (3) この立体 K の体積を求めよ。