

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

2000 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

$AB = AC$, $BC = 2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し, ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を考える。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ を通る直線を l , 原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする。ただし, 複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき,

「 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は, $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることである。」

を示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

$a > 0$ とする。正の整数 n に対して、区間 $0 \leq x \leq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{ 0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a, a \right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり、次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0) = c, \\ \frac{f_n((k+1)h) - f_n(kh)}{h} = \{1 - f_n(kh)\} f_n((k+1)h) \\ (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

ただし、 $h = \frac{a}{n}$, $c > 0$ である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $p_k = \frac{1}{f_n(kh)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とおいて p_k を求めよ。
- (2) $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ とおく。 $g(a)$ を求めよ。
- (3) $c = 2, 1, \frac{1}{4}$ それぞれの場合について、 $y = g(x)$ の $x > 0$ でのグラフをかけ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

座標平面上を運動する 3 点 P , Q , R があり, 時刻 t における座標が次で与えられている。

$$P: \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$$

$$Q: \quad x = 1 - vt, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R: \quad x = 1 - vt, \quad y = 1$$

ただし, v は正の定数である。この運動において, 以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

- (1) 点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π の間まではぶつからない。
- (2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字はたがいに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない。」

ただし， S の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は S に含まれるとする。

このとき次の問いに答えよ。

- (1) S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。
- (2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

- (1) a, b, c を正の実数とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 x, y, z を a, b, c で表せ。

- (2) a, b, c が $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 2, 1 \leq c \leq 2$ の範囲を動くとき, (1) の x, y, z を座標とする点 (x, y, z) が描く立体を K とする。立体 K を平面 $y = t$ で切った切り口の面積を求めよ。
- (3) この立体 K の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

