

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1999年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

(1) 一般角 θ に対して $\sin \theta$, $\cos \theta$ の定義を述べよ。

(2) (1) で述べた定義にもとづき, 一般角 α , β に対して

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

を証明せよ。

第 2 問

複素数 z_n ($n = 1, 2, \dots$) を

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = (3 + 4i)z_n + 1$$

によって定める。ただし i は虚数単位であり、また、複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対して、 $|z|$ を

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定義する。

(1) すべての自然数 n について、

$$\frac{3 \times 5^{n-1}}{4} < |z_n| < \frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 $r > 0$ に対して、 $|z_n| \leq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。このとき、

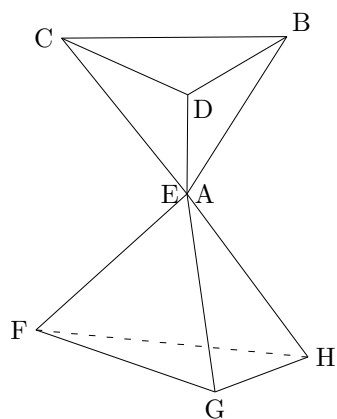
$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{\log r}$$

を求めよ。

第 3 問

p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする。

- (1) 四面体 $ABCD$ の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。このとき、頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし、各辺が電流を通すか通さないかは独立で、辺以外は電流を通さないものとする。
- (2) (1) で考えたような 2 つの四面体 $ABCD$ と $EFGH$ を図のように頂点 A と E でつないだとき、頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。



第 4 問

xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の 2 条件を満たしているものとする。

- (a) A, B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる。
- (b) A, B は一点 P のみを共有し、 P はそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし、円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。

第 5 問

(1) k を自然数とする。 m を $m = 2^k$ とおくと、 $0 < n < m$ を満たすすべての整数 n について、二項係数 ${}_m C_n$ は偶数であることを示せ。

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件： $0 \leq n \leq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m C_n$ は奇数である。

第 6 問

$\int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx > 8$ であることを示せ。ただし、 $\pi = 3.14\cdots$ は円周率、 $e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。