

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1998年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = (3x^2 - 4) \left(x - a + \frac{1}{a} \right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

第 2 問

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x + y + z \leq n \\ -x + y - z \leq n \\ x - y - z \leq n \\ -x - y + z \leq n \end{cases}$$

を満たす xyz 空間の点 $P(x, y, z)$ で、 x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ。

第 3 問

xy 平面に 2 つの円

$$C_0: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1: (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり, C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする。さらに, $n = 2, 3, \dots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。 C_n の半径を r_n , C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \quad p_n = q_n x_n$$

とおく。

- (1) q_n は整数であることを示せ。
- (2) p_n も整数で, p_n と q_n は互いに素であることを示せ。
- (3) α を $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として, 不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha|$$

を示し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

第 4 問

実数 a に対して $k \leq a < k+1$ を満たす整数 k を $[a]$ で表す。 n を正の整数として、

$$f(x) = \frac{x^2(2 \cdot 3^3 \cdot n - x)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2}$$

とおく。 $36n+1$ 個の整数

$$[f(0)], [f(1)], [f(2)], \dots, [f(36n)]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

第 5 問

θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。 xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

をとり、点 $P_n, Q_n, n = 1, 2, \dots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} = (1, 0) \\ \overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} - \left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n} \right) \vec{a} \\ \overrightarrow{OP_{n+1}} = 4 \left\{ \overrightarrow{OQ_n} - \left(\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n} \right) \vec{b} \right\} \end{cases}$$

で定める。ただし、 O は原点で、 $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n}$ はベクトルの内積を表す。

$\overrightarrow{OP_n} = (x_n, y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに、このような θ に対して、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

を求めよ。

第 6 問

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる。四角錐 $PABCD$ の

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

を満たす部分の体積を求めよ。