

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1997年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

a, b を正の数とし, xy 平面の 2 点 $A(a, 0)$ および $B(0, b)$ を頂点とする正 3 角形を ABC とする。ただし, C は第 1 象限の点とする。

- (1) 3 角形 ABC が正方形

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

に含まれるような (a, b) の範囲を求めよ。

- (2) (a, b) が (1) の範囲を動くとき, 3 角形 ABC の面積 S が最大となるような (a, b) を求めよ。また, そのときの S の値を求めよ。

第 2 問

n を正の整数, a を実数とする。すべての整数 m に対して,

$$m^2 - (a-1)m + \frac{n^2}{2n+1}a > 0$$

が成り立つような a の範囲を n を用いて表せ。

第 3 問

r は $0 < r < 1$ をみたす実数とする。 xyz 空間に原点 $O(0, 0, 0)$ と 2 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ をとる。

- (1) xyz 空間の点 P で条件

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = r|\overrightarrow{PO}|$$

をみたすものが存在するような r の範囲を求めよ。

- (2) 点 P が (1) の条件をみたして動くとき、内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の最大値, 最小値を r の関数と考えてそれぞれ $M(r)$, $m(r)$ で表す。このとき, 左からの極限

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2 \{M(r) - m(r)\}$$

を求めよ。

第 4 問

正 3 角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に, 3 角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし $0 < \theta < 60^\circ$ とする。この光線は 3 角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し, 頂点に到達するとそこでとまるものとする。また, 3 角形の内部では光線は直進するものとする。

- (1) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき, この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。
- (2) 正の整数 k を用いて $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき, この光線の到達する頂点を求め, またそこへ至るまでの反射の回数を k を用いて表せ。

第 5 問

a を $0 < a < \frac{1}{4}$ をみたす実数とする。 xy 平面で、不等式

$$y^2 \leq x^2(1 - x^2) - a$$

の表す領域を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

第 6 問

a を実数とする。

- (1) 曲線 $y = \frac{8}{27}x^3$ と放物線 $y = (x + a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) の範囲にあるとき、この 2 本の接線と放物線 $y = (x + a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。