

# 入学試験過去問題

## 数 学

### 東京大学（理科）

対象年度：1996 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：120 点

## 第 1 問

$xy$  平面において、行列  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換を  $f$  とし、点  $(1, 0)$  を中心とする半径  $\frac{1}{3}$  の円を  $C$  とする。 $f$  による  $C$  の像が直線  $x = \frac{2}{3}$  に接し、かつ領域  $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$  に含まれるような  $(a, b)$  全体のなす図形を  $ab$  平面上に図示せよ。

## 第 2 問

$a, b, c, d$  を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0 \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数  $s, t$  があるとき、2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$$

は  $-1 < x < 1$  の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

### 第 3 問

空間内の点  $O$  を中心とする一辺の長さが  $l$  の立方体の頂点を  $A_1, A_2, \dots, A_8$  とする。また、 $O$  を中心とする半径  $r$  の球面を  $S$  とする。

- (1)  $S$  上のすべての点から  $A_1, A_2, \dots, A_8$  のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を  $l$  と  $r$  で表せ。
- (2)  $S$  上のすべての点から  $A_1, A_2, \dots, A_8$  のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を  $l$  と  $r$  で表せ。

ただし、 $S$  上の点  $P$  から  $A_k$  が見えるとは、 $A_k$  が  $S$  の外側にあり、線分  $PA_k$  と  $S$  との共有点が  $P$  のみであることとする。

## 第 4 問

1つのサイコロを続けて投げて、それによって  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を以下のように定める。

出た目の数を順に  $c_1, c_2, \dots$  とするとき、

$1 \leq k \leq n-1$  をみたすすべての整数  $k$  に対し、 $c_k \leq c_n$  ならば  $a_n = c_n$ 、

それ以外るとき  $a_n = 0$  とおく。ただし、 $a_1 = c_1$  とする。

- (1)  $a_n$  の期待値を  $E(n)$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(n)$  を求めよ。
- (2)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  のうち 2 に等しいものの個数の期待値を  $N(n)$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n)$  を求めよ。

## 第 5 問

$xyz$  空間内の円柱  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $R > 0$  を側面とする容器に, 水面が  $z = 0$  と一致するように  $z \leq 0$  の部分に水がはいっている。

$z \geq 0$  に対して定義された連続な関数  $r(z)$  で

$$r(0) = 0, \quad 0 \leq r(z) < R$$

をみたすものを考える。 $xz$  平面内の不等式

$$0 \leq x \leq r(z), \quad z \geq 0$$

で表される領域を  $z$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと,  $t$  秒後には水面が  $z = f(t)$  に上昇するという。

$t \geq 0$  に対し,  $f(t) = e^t - t - 1$  であるとき, 関数  $r(z)$  を決定せよ。

## 第 6 問

$\alpha, \beta$  を正の数とし,  $xy$  平面において, だ円

$$C: \frac{x^2}{\alpha} + \frac{(y - \sqrt{\beta})^2}{\beta} = 1$$

と領域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  を考える。

- (1)  $C$  が  $D$  に含まれるような点  $(\alpha, \beta)$  の範囲を求め,  $\alpha\beta$  平面上に図示せよ。
- (2) 点  $(\alpha, \beta)$  が (1) で求めた範囲を動くとき, だ円  $C$  の面積の最大値を求めよ。