

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1996 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

xy 平面において, 行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし, 点 $(1, 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円を C とする。 f による C の像が直線 $x = \frac{2}{3}$ に接し, かつ領域 $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$ に含まれるような (a, b) 全体のなす図形を ab 平面上に図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

a, b, c, d を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0 \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数 s, t があるとき、2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$$

は $-1 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

空間内の点 O を中心とする一辺の長さが l の立方体の頂点を $A_1, A_2, \dots, A_8$ とする。また、 O を中心とする半径 r の球面を S とする。

- (1) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。
- (2) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。

ただし、 S 上の点 P から A_k が見えるとは、 A_k が S の外側にあり、線分 PA_k と S との共有点が P のみであることとする。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

1つのサイコロを続けて投げて、それによって a_n ($n = 1, 2, \dots$) を以下のように定める。

出た目の数を順に $c_1, c_2, \dots$ とするとき、

$1 \leq k \leq n-1$ をみたすすべての整数 k に対し、 $c_k \leq c_n$ ならば $a_n = c_n$ 、

それ以外るとき $a_n = 0$ とおく。ただし、 $a_1 = c_1$ とする。

- (1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(n)$ を求めよ。
- (2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ のうち 2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

xyz 空間内の円柱 $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ を側面とする容器に, 水面が $z = 0$ と一致するように $z \leq 0$ の部分に水がはいっている。

$z \geq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0) = 0, \quad 0 \leq r(z) < R$$

をみたすものを考える。 xz 平面内の不等式

$$0 \leq x \leq r(z), \quad z \geq 0$$

で表される領域を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと, t 秒後には水面が $z = f(t)$ に上昇するという。

$t \geq 0$ に対し, $f(t) = e^t - t - 1$ であるとき, 関数 $r(z)$ を決定せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

α, β を正の数とし, xy 平面において, だ円

$$C: \frac{x^2}{\alpha} + \frac{(y - \sqrt{\beta})^2}{\beta} = 1$$

と領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を考える。

- (1) C が D に含まれるような点 (α, β) の範囲を求め, $\alpha\beta$ 平面上に図示せよ。
- (2) 点 (α, β) が (1) で求めた範囲を動くとき, だ円 C の面積の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

