

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1995 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

すべての正の実数 x, y に対し

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

$f(x) = 1 - \sin x$ に対し, $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ とおく。このとき, 任意の実数 x, y について

$$g(x+y) + g(x-y) \geq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

二辺の長さが1と2の長方形と一辺の長さが2の正方形の2種類のタイルがある。縦2, 横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような並べ方の総数を A_n で表す。ただし, n は正の整数である。たとえば, $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 5$ である。このとき以下の問に答えよ。

- (1) $n \geq 3$ のとき, A_n を A_{n-1} , A_{n-2} を用いて表せ。
- (2) A_n を n で表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

N を正の整数とする。 N の正の約数 n に対し,

$$f(n) = n + N/n$$

とおく。このとき、次の各 N に対して $f(n)$ の最小値を求めよ。

(1) $N = 2^k$, ただし k は正の整数

(2) $N = 7!$

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

サイコロを n 回投げて, xy 平面上の点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ を次の規則 (a), (b) によって定める。

(a) $P_0 = (0, 0)$

(b) $1 \leq k \leq n$ のとき, k 回目に出た目の数が 1, 2, 3, 4 のときには, P_{k-1} をそれぞれ東, 北, 西, 南に $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ だけ動かした点を P_k とする。また k 回目に出た目の数が 5, 6 のときには $P_k = P_{k-1}$ とする。ただし y 軸の正の向きを北と定める。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_n が x 軸上にあれば, $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ もすべて x 軸上にあることを示せ。

(2) P_n が第 1 象限 $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ にある確率を n で表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

原点を O とする xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

上の点 P における接線と 2 つの漸近線との交点を Q, R とする。このとき以下の問に答えよ。

- (1) 三角形 OQR の面積 S は、点 P のとり方にはよらず、 a, b によって定まることを示せ。
- (2) $a = 5e^{2t} + e^{-t}$, $b = e^{2t} + e^{-t}$ として実数 t を変化させるときの S の最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

