

# 入学試験過去問題

## 数 学

### 東京大学（理科）

対象年度：1993 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：120 点

## 第 1 問

すべての面が合同な四面体 ABCD がある。頂点 A, B, C はそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸上の正の部分にあり、辺の長さは  $AB = 2l - 1$ ,  $BC = 2l$ ,  $CA = 2l + 1$  ( $l > 2$ ) である。四面体 ABCD の体積を  $V(l)$  とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{l \rightarrow 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

## 第 2 問

整数からなる数列  $\{a_n\}$  を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。

- (1)  $a_n$  が偶数となることと、 $n$  が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。
- (2)  $a_n$  が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ。

### 第 3 問

$xy$  平面内に次の二つの集合  $l, m$  を考える。

$$l = \{(-5, y) \mid -5 < y < 5\}, \quad m = \{(5, y) \mid -5 < y < 5\}$$

$l, m$  上にない 2 点  $A, B$  に対し,  $A, B$  を  $l, m$  と交わらない線分又は折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を  $d(A, B)$  で表す。

2 点  $P(-9, -3), Q(9, 3)$  に対し  $d(P, R) = d(Q, R)$  となる点  $R$  の軌跡を  $xy$  平面上に図示せよ。

## 第 4 問

$n$  を 2 以上の自然数とし  $f(x) = x^n + px + q$  ( $p, q$  は実数) の形の  $n$  次関数について積分

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$$

を考える。 $I$  を最小にするような  $(p, q)$  が唯一組存在することを示し、そのような  $(p, q)$  と  $I$  の最小値を求めよ。

## 第 5 問

1 と 0 を 5 個ならべた列 10110 をある人が繰り返し書き写すとする。ただしこの列を  $S$  で表し、これの第 1 回の写しを  $S_1$  で表すとき、第 2 回目には書き写すときは  $S_1$  を書き写す。 $S_1$  の写しを  $S_2$  とするとき、第 3 回目には  $S_2$  を書き写す。以下同様に続ける。

この人が 0 を 1 に写しまちがえる確率は  $p$  ( $0 < p < 1$ ) であり、1 を 0 に写しまちがえる確率は  $q$  ( $0 < q < 1$ ) であるが、それ以外の写しまちがいはないものとする。第  $n$  回目の写し  $S_n$  が  $S$  に一致する確率を  $C(n)$  とするとき、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} C(n)$  を求めよ。

## 第 6 問

時刻  $t$  における座標が

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

で表される  $xy$  平面上の点  $P$  の運動を考える。

- (1)  $P$  の速さ，すなわち速度ベクトル  $\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  の大きさの最大値と最小値を求めよ。
- (2)  $t$  が  $0 \leq t < 2\pi$  の範囲を動く間に  $P$  が 2 回以上通過する点が唯一存在することを示し，その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ。