

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1993 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

すべての面が合同な四面体 ABCD がある。頂点 A, B, C はそれぞれ x , y , z 軸上の正の部分にあり, 辺の長さは $AB = 2l - 1$, $BC = 2l$, $CA = 2l + 1$ ($l > 2$) である。四面体 ABCD の体積を $V(l)$ とするとき, 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{l \rightarrow 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_n が偶数となることと、 n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。
- (2) a_n が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

xy 平面内に次の二つの集合 l, m を考える。

$$l = \{(-5, y) \mid -5 < y < 5\}, \quad m = \{(5, y) \mid -5 < y < 5\}$$

l, m 上にない 2 点 A, B に対し, A, B を l, m と交わらない線分又は折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(A, B)$ で表す。

2 点 $P(-9, -3), Q(9, 3)$ に対し $d(P, R) = d(Q, R)$ となる点 R の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

n を 2 以上の自然数とし $f(x) = x^n + px + q$ (p, q は実数) の形の n 次関数について積分

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$$

を考える。 I を最小にするような (p, q) が唯一組存在することを示し, そのような (p, q) と I の最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

1 と 0 を 5 個ならべた列 10110 をある人が繰り返し書き写すとする。ただしこの列を S で表し、これの第 1 回の写しを S_1 で表すとき、第 2 回目には S_1 を書き写す。 S_1 の写しを S_2 とするとき、第 3 回目には S_2 を書き写す。以下同様に続ける。

この人が 0 を 1 に写しまちがえる確率は p ($0 < p < 1$) であり、1 を 0 に写しまちがえる確率は q ($0 < q < 1$) であるが、それ以外の写しまちがいはないものとする。第 n 回目の写し S_n が S に一致する確率を $C(n)$ とするとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} C(n)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

時刻 t における座標が

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

で表される xy 平面上の点 P の運動を考える。

- (1) P の速さ, すなわち速度ベクトル $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ の大きさの最大値と最小値を求めよ。
- (2) t が $0 \leq t < 2\pi$ の範囲を動く間に P が 2 回以上通過する点が唯一存在することを示し, その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

