

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1992年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

a は 1 より大きい定数とし, xy 平面上の点 $(a, 0)$ を A, 点 $(a, \log a)$ を B, 曲線 $y = \log x$ と x 軸の交点を C とする。さらに x 軸, 線分 BA および曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。

(1) $1 \leq b \leq a$ となる b に対し点 $(b, \log b)$ を D とする。四辺形 ABCD の面積が S_1 にもっとも近くなるような b の値と, そのときの四辺形 ABCD の面積 S_2 を求めよ。

(2) $a \rightarrow \infty$ のときの $\frac{S_2}{S_1}$ の極限値を求めよ。

第 2 問

xy 平面において、 x 座標、 y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点に持つ三角形 ABC を考える。

- (1) 辺 AB, AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとする、辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。
- (2) 辺 AB, AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在する、とすると、三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

第 3 問

a, b を正の実数とする。座標空間の 4 点 $P(0, 0, 0)$, $Q(a, 0, 0)$, $R(0, 1, 0)$, $S(0, 1, b)$ が半径 1 の同一球面上にあるとき, P, Q, R, S を頂点とする四面体に内接する球の半径を r とすれば, 次の二つの不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3}, \quad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

第 4 問

xyz 空間において, x 軸の平行な柱面

$$A = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1, x, y, z \text{ は実数}\}$$

から, y 軸と平行な柱面

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 - \sqrt{3}xz + z^2 = \frac{1}{4}, x, y, z \text{ は実数}\}$$

により囲まれる部分を切り抜いた残りの図形を C とする。図形 C の展開図をえがけ。ただし点 $(0, 1, 0)$ を通り x 軸と平行な直線に沿って C を切り開くものとする。

第 5 問

xy 平面において、曲線 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ 上の点、 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ を出発し、この曲線上を進む点 P がある。出発してから t 秒後の P の速度 $\vec{v}$ の大きさは $\frac{t}{2}$ に等しく、 $\vec{v}$ の x 成分はつねに正または 0 であるとする。

- (1) 出発してから t 秒後の P の位置を (x, y) として、 x と t の間の関係式を求めよ。
- (2) $\vec{v}$ がベクトル $(8, 15)$ と平行になるのは出発してから何秒後か。

第 6 問

A, B の二人がじゃんけんをして、グーで勝てば 3 歩, チョキで勝てば 5 歩, パーで勝てば 6 歩進む遊びをしている。1 回のじゃんけんで A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値の期待値を E とする。

- (1) B がグー, チョキ, パーを出す確率がすべて等しいとする。A がどのような確率で, グー, チョキ, パーを出すとき, E の値は最大となるか。
- (2) B がグー, チョキ, パーを出す確率の比が $a : b : c$ であるとする。A がどのような確率でグー, チョキ, パーを出すならば, 任意の a, b, c に対し, $E \geq 0$ となるか。