

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1991 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：120 点

第 1 問

平面上に正四面体が置いてある。平面と接している面の 3 辺のひとつを任意に選び、これを軸として正四面体をたおす。 n 回の操作の後に、最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を求めよ。

第 2 問

a, b, c を正の実数とする。 xyz 空間において, $|x| \leq a, |y| \leq b, z = c$ をみたす点 (x, y, z) からなる板 R を考える。点光源 P が平面 $z = c + 1$ 上の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c + 1$ の上を一周するとき, 光が板 R にさえぎられて xy 平面上にできる影の通過する部分の図をえがき, その面積を求めよ。

第 3 問

定数 p に対して、3 次方程式 $x^3 - 3x - p = 0$ の実数解の中で最大のものと最小のものとの積を $f(p)$ とする。ただし、実数解がただひとつのときには、その 2 乗を $f(p)$ とする。

- (1) p がすべての実数を動くとき、 $f(p)$ の最小値を求めよ。
- (2) p の関数 $f(p)$ のグラフの概形をえがけ。

第 4 問

- (1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, ある多項式 $p_n(x)$, $q_n(x)$ が存在して,

$$\sin n\theta = p_n(\tan \theta) \cos^n \theta, \quad \cos n\theta = q_n(\tan \theta) \cos^n \theta$$

と書けることを示せ。

- (2) このとき, $n > 1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ。

$$p'_n(x) = nq_{n-1}(x), \quad q'_n(x) = -np_{n-1}(x)$$

第 5 問

xy 平面上, x 座標, y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ。
各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており, 傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの
円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

第 6 問

$f(x)$ は $x > 0$ で定義された連続な関数で、 $0 < x_1 < x_2$ ならば、つねに $f(x_1) > f(x_2) > 0$ であるものとし、 $S(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ とおく。このとき、 $S(1) = 1$ であり、さらに任意の $a > 0$ に対して、原点と点 $(a, f(a))$ 、原点と点 $(2a, f(2a))$ を結ぶ 2 直線と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(a)$ に等しいものとする。

- (1) $S(x)$, $f(x) - 2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ。
- (2) $x > 0$ に対して、 $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f(2^n x)$ とおく。積分 $\int_x^{2x} a(t) dt$ の値を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ を決定せよ。