

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1990 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：120 点

第 1 問

$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

第 2 問

3 次関数 $h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は、次の条件 (i), (ii) をみたすものとする。

(i) $h(1) = 1, h(-1) = -1$

(ii) 区間 $-1 < x < 1$ で極大値 1, 極小値 -1 をとる。

このとき,

(1) $h(x)$ を求めよ。

(2) 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が区間 $-1 < x < 1$ で $-1 < f(x) < 1$ をみたすとき, $|x| > 1$ なる任意の実数 x に対して不等式 $|f(x)| < |h(x)|$ が成立することを証明せよ。

第 3 問

V を一辺の長さが 1 の正 8 面体, すなわち xyz 空間において $|x| + |y| + |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす点 (x, y, z) の集合と合同な立体とする。

- (1) V の一つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さは一定であることを示せ。
- (2) 一辺の長さが 1 の正方形の穴が空いた平面がある。 V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。

第 4 問

行列 $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & -\frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$ に対し、点列 $P_n = (x_n, y_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

- (1) a が正の実数を動くとき、 $\triangle P_0 P_1 P_2$ の面積を最大にする a の値を求めよ。
- (2) a を (1) で求めた値とする。 $\triangle P_0 P_1 P_2, \triangle P_1 P_2 P_3, \dots, \triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ の和集合として表される図形の面積を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

第 5 問

円 $x^2 + y^2 = 1$ を C_0 , だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) を C_1 とする。 C_1 上のどんな点 P に対しても, P を頂点にもち C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a, b で表せ。

第 6 問

一つのサイコロを続けて投げて、最初の n 回に出た目の数をその順序のまま小数点以下に並べてできる実数を a_n とおく。たとえば、出た目の数が 5, 2, 6, $\dots\dots$ であれば, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.52$, $a_3 = 0.526$, $\dots\dots$ である。実数 α に対して $a_n \leq \alpha$ となる確率を $p_n(\alpha)$ とおく。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\alpha) = \frac{1}{2}$ となるのは α がどのような範囲にあるときか。