

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1990 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

3 次関数 $h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は、次の条件 (i), (ii) をみたすものとする。

(i) $h(1) = 1, h(-1) = -1$

(ii) 区間 $-1 < x < 1$ で極大値 1, 極小値 -1 をとる。

このとき、

(1) $h(x)$ を求めよ。

(2) 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が区間 $-1 < x < 1$ で $-1 < f(x) < 1$ をみたすとき、 $|x| > 1$ なる任意の実数 x に対して不等式 $|f(x)| < |h(x)|$ が成立することを証明せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

V を一辺の長さが 1 の正 8 面体, すなわち xyz 空間において $|x| + |y| + |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす点 (x, y, z) の集合と合同な立体とする。

- (1) V の一つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さは一定であることを示せ。
- (2) 一辺の長さが 1 の正方形の穴が空いた平面がある。 V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

行列 $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & -\frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$ に対し、点列 $P_n = (x_n, y_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

- (1) a が正の実数を動くとき、 $\triangle P_0 P_1 P_2$ の面積を最大にする a の値を求めよ。
- (2) a を (1) で求めた値とする。 $\triangle P_0 P_1 P_2, \triangle P_1 P_2 P_3, \dots, \triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ の和集合として表される図形の面積を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

円 $x^2 + y^2 = 1$ を C_0 , だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) を C_1 とする。 C_1 上のどんな点 P に対しても, P を頂点にもち C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a, b で表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

一つのサイコロを続けて投げて，最初の n 回に出た目の数をその順序のまま小数点以下に並べてできる実数を a_n とおく。たとえば，出た目の数が 5, 2, 6, …… であれば， $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.52$, $a_3 = 0.526$, …… である。実数 α に対して $a_n \leq \alpha$ となる確率を $p_n(\alpha)$ とおく。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\alpha) = \frac{1}{2}$ となるのは α がどのような範囲にあるときか。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

