

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1989年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

$k > 0$ とする。 xy 平面上の二曲線

$$y = k(x - x^3), \quad x = k(y - y^3)$$

が第 1 象限に $\alpha \neq \beta$ なる交点 (α, β) をもつような k の範囲を求めよ。

第 2 問

xy 平面上に $y = -1$ を準線，点 $F(0, 1)$ を焦点とする放物線がある。この放物線上の点 $P(a, b)$ を中心として，準線に接する円 C を描き，接点を H とする。 $a > 2$ とし，円 C と y 軸との交点のうち F と異なるものを G とする。扇形 PFH （中心角の小さい方）の面積を $S(a)$ ，三角形 PGF の面積を $T(a)$ とするとき， $a \rightarrow \infty$ としたときの極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。

第 3 問

虚部が正の複素数の全体を H とする。すなわち,

$$H = \{z = x + iy \mid x, y \text{ は実数で } y > 0\}$$

とする。以下 z を H に属する複素数とする。 q を正の実数とし,

$$f(z) = \frac{z+1-q}{z+1}$$

とおく。

- (1) $f(z)$ もまた H に属することを示せ。
- (2) $f_1(z) = f(z)$ と書き, 以下 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して

$$f_2(z) = f(f_1(z)), \quad f_3(z) = f(f_2(z)), \quad \dots, \quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)), \quad \dots$$

とおく。このとき, H のすべての元 z に対して $f_{10}(z) = f_5(z)$ が成立するような q の値を求めよ。

第 4 問

$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分のけた数と、1 の位の数字を求めよ。ただし、 $3^{21} = 10460353203$ を用いてよい。

第 5 問

$f(x) = \pi x^2 \sin \pi x^2$ とする。 $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は $V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx$ で与えられることを示し、この値を求めよ。

第 6 問

3 個の赤玉と n 個の白玉を無作為に環状に並べるものとする。このとき白玉が連続して $k+1$ 個以上並んだ箇所が現れない確率を求めよ。ただし $\frac{n}{3} \leq k \leq \frac{n}{2}$ とする。