

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1988年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

xy 平面上の一次変換 f が次の 3 条件をみたすとする。

- (i) 点 $(1, 0)$ は f により第 4 象限の内部にうつる。
- (ii) 点 $(0, 1)$ は f により第 2 象限の内部にうつる。
- (iii) 点 $(1, 1)$ は f により第 1 象限の内部にうつる。

このとき f には逆変換が存在することを示せ。また、点 P の像 $f(P)$ が第 1 象限の内部にあれば、点 P も第 1 象限の内部にあることを示せ。

第 2 問

空間内に平面 α がある。一辺の長さ 1 の正四面体 V の α 上への正射影の面積を S とし、 V がいろいろと位置を変えるとときの S の最大値と最小値を求めよ。

ただし、空間の点 P を通って α に垂直な直線が α と交わる点を P の α 上への正射影といい、空間図形 V の各点の α 上への正射影全体のつくる α 上の図形を V の α 上への正射影という。

第 3 問

C を $y = x^3 - x$, $-1 \leq x \leq 1$ で与えられる xy 平面上の図形とする。次の条件をみたす xy 平面上の点 P 全体の集合を図示せよ。

「 C を平行移動した図形で、点 P を通り、かつもとの図形 C との共有点がただ 1 点であるようなものが、ちょうど 3 個存在する。」

第 4 問

xy 平面上で原点から傾き a ($a > 0$) で出発し折れ線状に動く点 P を考える。ただし、点 P の y 座標はつねに増加し、その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 ($s > 0$) に変化するものとする。

P の描く折れ線が直線 $x = b$ ($b > 0$) を横切るための a, b, s に関する条件を求めよ。

第 5 問

xyz 空間において、 xz 平面上の $0 \leq z \leq 2 - x^2$ で表される図形を z 軸のまわりに回転して得られる不透明な立体を V とする。 V の表面上 z 座標 1 のところにひとつの点光源 P がある。

xy 平面上の原点を中心とする円 C の、 P からの光が当たっている部分の長さが 2π であるとき、 C のかげの部分の長さを求めよ。

第 6 問

空間内の点 O に対して、4 点 A, B, C, D を

$$OA = 1, \quad OB = OC = OD = 4$$

をみたすようにとるとき、四面体 $ABCD$ の体積の最大値を求めよ。