

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1987年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す xy 平面の一次変換が、直線 $y = 2x + 1$ を直線 $y = -3x - 1$ へうつすとする。点 $P(1, 2)$ がうつる点を Q とし、原点を O とするとき、二直線 OP と OQ のなす角の大きさを求めよ。

第 2 問

点 (x, y) を点 $(x + a, y + b)$ にうつす平行移動によって曲線 $y = x^2$ を移動して得られる曲線を C とする。 C と曲線 $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ が接するような a, b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲の概形を図示せよ。

また、この二曲線が接する点以外に共有点を持たないような a, b の値を求めよ。ただし、二曲線がある点で接するとは、その点で共通の接線を持つことである。

第 3 問

xyz 空間内の点 $P(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 K がある。

K 上の点 $Q(a, b, c)$ が条件 $a > 0, b > 0, c > 1$ のもとで K 上を動くとき、 Q において K に接する平面を L とし、 L が x 軸、 y 軸、 z 軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とする。このような三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

第 4 問

xyz 空間において、点 P は yz 平面上の放物線 $z = 1 - y^2$ 上にあるとする。点 $A(1, 0, 1)$ と P を結ぶ直線を x 軸のまわりに回転して得られる曲面と二平面 $x = 0$, $x = 1$ とによって囲まれる部分の体積を V とする。 V を P の y 座標で表せ。また V の最小値を求めよ。

第 5 問

n を 2 以上の自然数とする。 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ および $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ を満足する数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ および $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が与えられている。 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を並べ替えて得られるどのような数列 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対しても

$$\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ。

第 6 問

正六角形の頂点に 1 から 6 までの番号を順につける。また n 個のサイコロを振り、出た目を番号とするすべての頂点にしるしをつけるものとする。このとき、しるしのついた三点を頂点とする直角三角形が存在する確率を p_n とする。

(1) p_3, p_4 を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$ を求めよ。