

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1985 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：120 点

第 1 問

$a \geq 1$ とする。 xy 平面において、不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $1 \leq y \leq a \sin x$ によって定められる領域の面積を S_1 , 不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq a \sin x$, $0 \leq y \leq 1$ によって定められる領域の面積を S_2 とする。 $S_2 - S_1$ を最大にするような a の値と, $S_2 - S_1$ の最大値を求めよ。

第 2 問

xy 平面において、 O を原点、 A を定点 $(1, 0)$ とする。また、 P, Q は円周 $x^2 + y^2 = 1$ の上を動く 2 点であって、線分 OA から正の向きにまわって線分 OP にいたる角と、線分 OP から正の向きにまわって線分 OQ にいたる角が等しいという関係が成り立っているものとする。

点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を R 、点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする。実数 $l \geq 0$ を与えたとき、線分 RS の長さが l と等しくなるような点 P, Q の位置は何通りあるか。

第 3 問

t を正の数とする。 xyz 空間において、点 $(t, t, 0)$ を P とし、 x 軸を含み点 $(t, t, 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を Q 、 y 軸を含み点 $(t, t, 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を R とする。また、原点を O とする。4 点 O, P, Q, R を頂点とする 4 面体の体積を求めよ。

第 4 問

a, b を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}$ とおく。

- (1) 行列 A^n ($n = 1, 2, \dots$) の表す一次変換による点 $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $R(1, 1)$ の像をそれぞれ P_n, Q_n, R_n とし, $f_n = 3\overline{P_n Q_n}^2 + 2\overline{Q_n R_n}^2 + 2\overline{R_n P_n}^2$ とおく。(ここで, $\overline{CD}$ は線分 CD の長さを表す。) f_n を a, b を用いて表せ。
- (2) $a = 1.1, b = \frac{1}{1.1}$ であるとして, f_n の値を最小にするような自然数 n を求めよ。

第 5 問

0 または正の整数の値をとる変数 X, Y がある。 X が整数 n ($n \geq 0$) の値をとる確率と、 Y が整数 n ($n \geq 0$) の値をとる確率は、ともに p_n であるとする。(ここで、 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ である。)

いま、任意の整数 m, n ($m \geq 0, n \geq 0$) に対して、 $X = m$ なる事象と $Y = n$ なる事象は独立であり、また、 $X + Y = n$ となる確率は $(n+1)p_{n+1}$ に等しいという。このとき、 p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) と $\sum_{n=0}^{\infty} np_n$ の値を求めよ。

第 6 問

xyz 空間において、点 $(0, 0, 0)$ を A, 点 $(8, 0, 0)$ を B, 点 $C(6, 2\sqrt{3}, 0)$ を C とする。点 P が $\triangle ABC$ の辺上を一周するとき、P を中心とし半径 1 の球が通過する点全体をつくる立体を K とする。

- (1) K を平面 $z = 0$ で切った切り口の面積を求めよ。
- (2) K の体積を求めよ。