

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1985 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

$a \geq 1$ とする。 xy 平面において、不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $1 \leq y \leq a \sin x$ によって定められる領域の面積を S_1 , 不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq a \sin x$, $0 \leq y \leq 1$ によって定められる領域の面積を S_2 とする。 $S_2 - S_1$ を最大にするような a の値と, $S_2 - S_1$ の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

xy 平面において、 O を原点、 A を定点 $(1, 0)$ とする。また、 P, Q は円周 $x^2 + y^2 = 1$ の上を動く 2 点であって、線分 OA から正の向きにまわって線分 OP にいたる角と、線分 OP から正の向きにまわって線分 OQ にいたる角が等しいという関係が成り立っているものとする。

点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を R 、点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする。実数 $l \geq 0$ を与えたとき、線分 RS の長さが l と等しくなるような点 P, Q の位置は何通りあるか。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

t を正の数とする。 xyz 空間において、点 $(t, t, 0)$ を P とし、 x 軸を含み点 $(t, t, 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を Q 、 y 軸を含み点 $(t, t, 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を R とする。また、原点を O とする。4 点 O, P, Q, R を頂点とする 4 面体の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

a, b を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}$ とおく。

- (1) 行列 A^n ($n = 1, 2, \dots$) の表す一次変換による点 $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $R(1, 1)$ の像をそれぞれ P_n , Q_n , R_n とし, $f_n = 3\overline{P_nQ_n}^2 + 2\overline{Q_nR_n}^2 + 2\overline{R_nP_n}^2$ とおく。(ここで, $\overline{CD}$ は線分 CD の長さを表す。) f_n を a, b を用いて表せ。
- (2) $a = 1.1$, $b = \frac{1}{1.1}$ であるとして, f_n の値を最小にするような自然数 n を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

0 または正の整数の値をとる変数 X, Y がある。 X が整数 n ($n \geq 0$) の値をとる確率と、 Y が整数 n ($n \geq 0$) の値をとる確率は、ともに p_n であるとする。(ここで、 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ である。)

いま、任意の整数 m, n ($m \geq 0, n \geq 0$) に対して、 $X = m$ なる事象と $Y = n$ なる事象は独立であり、また、 $X + Y = n$ となる確率は $(n+1)p_{n+1}$ に等しいという。このとき、 p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) と $\sum_{n=0}^{\infty} np_n$ の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

xyz 空間において、点 $(0, 0, 0)$ を A, 点 $(8, 0, 0)$ を B, 点 $C(6, 2\sqrt{3}, 0)$ を C とする。点 P が $\triangle ABC$ の辺上を一周するとき、P を中心とし半径 1 の球が通過する点全体のつくる立体を K とする。

- (1) K を平面 $z = 0$ で切った切り口の面積を求めよ。
- (2) K の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

