

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1984年

試験時間：150分

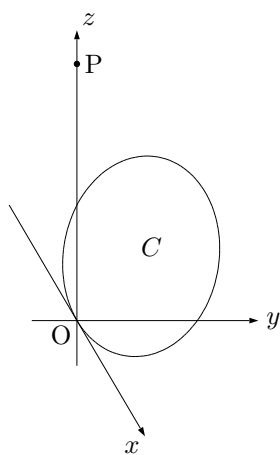
問題数：6問

配点：120点

第 1 問

空間内の点の集合 $\{(x, y, z) \mid 0 \leq y, 0 \leq z\}$ に含まれ、原点 O において x 軸に接し、 xy 平面と 45° の傾きをなす、半径 1 の円板 C がある。座標が $(0, 0, 2\sqrt{2})$ の位置にある点光源 P により、 xy 平面上に投ぜられた円板 C の影を S とする。

- i) S の輪郭を表す xy 平面上の曲線の方程式を求めよ。
- ii) 円板 C と影 S の間にはさまれ、光の届かない部分の作る立体の体積を求めよ。



第 2 問

xy 平面において、直線 $x = 0$ を L とし、曲線 $y = \log x$ を C とする。さらに、 L 上、または C 上、または L と C との間にはさまれた部分にある点全体の集合を A とする。 A に含まれ、直線 L に接し、かつ曲線 C と点 $(t, \log t)$ ($0 < t$) において共通の接線をもつ円の中心を P_t とする。

P_t の x 座標、 y 座標を t の関数として $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表したとき、次の極限值はどのような数となるか。

i) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)}$

ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)}$

第 3 問

2 以上の自然数 k に対して $f_k(x) = x^k - kx + k - 1$ とおく。このとき、次のことを証明せよ。

- i) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには、 $g(x)$ が定数 $a_2, \dots, a_n$ を用いて

$$g(x) = \sum_{k=2}^n a_k f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。

- ii) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには、 $g(x)$ が関係式

$$\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} a_k = 0$$

をみたす定数 $a_2, \dots, a_n$ を用いて

$$g(x) = \sum_{k=2}^n a_k f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。

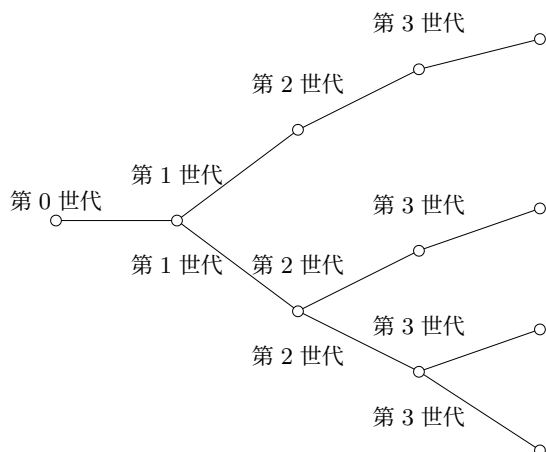
第 4 問

空間内に、3 点 $P\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $Q\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $R\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正 3 角形の板 S がある。 S を z 軸のまわりに 1 回転させたとき、 S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

第 5 問

各世代ごとに，各個体が，他の個体とは独立に，確率 p で 1 個，確率 $1 - p$ で 2 個の新しい個体を次の世代に残し，それ自身は消滅する細胞がある。いま，第 0 世代に 1 個であった細胞が，第 n 世代に m 個となる確率を， $P_n(m)$ とかくことにしよう。

n を自然数とするととき， $P_n(1)$ ， $P_n(2)$ ， $P_n(3)$ を求めよ。



第 6 問

xy 平面において、不等式 $x^2 \leq y$ の表す領域を D とし、不等式 $(x-4)^2 \leq y$ の表す領域を E とする。

このとき、次の条件 (*) を満たす点 $P(a, b)$ 全体の集合を求め、これを図示せよ。

(*) $P(a, b)$ に関して D と対称な領域を U とするとき、

$$D \cap U \neq \phi, \quad E \cap U \neq \phi, \quad D \cap E \cap U = \phi$$

が同時に成り立つ。ただし、 ϕ は空集合を表すものとする。