入　学　試　験　問　題　前

数　学（理科）

（配点 120 点）

1984 年度　　試験時間　150 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。

4　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問〜第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問〜第 6 問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号（表面 2 箇所，裏面 1 箇所），科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

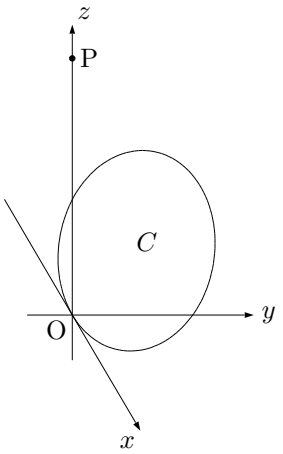
（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

空間内の点の集合 $\{(x,\ y,\ z) \mid 0 \leqq y,\ 0 \leqq z\}$ に含まれ，原点 O において x 軸に接し，xy 平面と 45° の傾きをなす，半径 1 の円板 C がある。座標が $\left(0,\ 0,\ 2\sqrt{2}\right)$ の位置にある点光源 P により，xy 平面上に投ぜられた円板 C の影を S とする。

i)　S の輪郭を表す xy 平面上の曲線の方程式を求めよ。

ii)　円板 C と影 S の間にはさまれ，光の届かない部分の作る立体の体積を求めよ。



計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

xy 平面において，直線 $x=0$ を L とし，曲線 $y=\log x$ を C とする。さらに，L 上，または C 上，または L と C との間にはさまれた部分にある点全体の集合を A とする。A に含まれ，直線 L に接し，かつ曲線 C と点 $(t,\ \log t)$ $(0<t)$ において共通の接線をもつ円の中心を P_t とする。

P_t の x 座標，y 座標を t の関数として $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表したとき，次の極限値はどのような数となるか。

i) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}$

ii) $\displaystyle\lim_{t\to +\infty}\frac{f(t)}{g(t)}$

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

2 以上の自然数 k に対して $f_k(x) = x^k - kx + k - 1$ とおく。このとき，次のことを証明せよ。

i) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには，$g(x)$ が定数 $a_2, \cdots, a_n$ を用いて

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。

ii) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには，$g(x)$ が関係式

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} a_k = 0$$

をみたす定数 $a_2, \cdots, a_n$ を用いて

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

空間内に，3 点 $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{R}\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正 3 角形の板 S がある。S を z 軸のまわりに 1 回転させたとき，S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

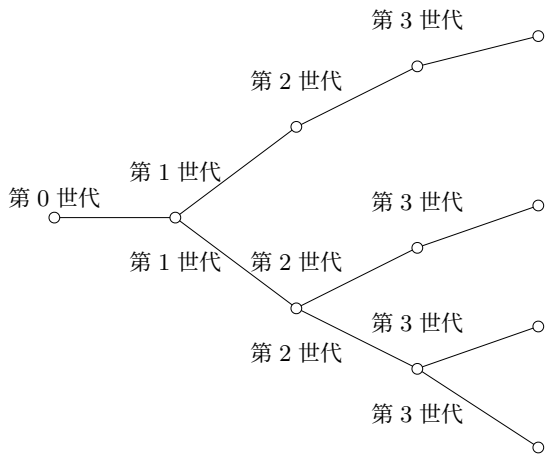
計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

各世代ごとに，各個体が，他の個体とは独立に，確率 p で 1 個，確率 $1-p$ で 2 個の新しい個体を次の世代に残し，それ自身は消滅する細胞がある。いま，第 0 世代に 1 個であった細胞が，第 n 世代に m 個となる確率を，$P_n(m)$ とかくことにしよう。

n を自然数とするとき，$P_n(1)$，$P_n(2)$，$P_n(3)$ を求めよ。



計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

xy 平面において，不等式 $x^2 \leqq y$ の表す領域を D とし，不等式 $(x-4)^2 \leqq y$ の表す領域を E とする。

このとき，次の条件 $(*)$ を満たす点 $\mathrm{P}\,(a,\ b)$ 全体の集合を求め，これを図示せよ。

$(*)$　$\mathrm{P}\,(a,\ b)$ に関して D と対称な領域を U とするとき，

$$D \cap U \neq \phi, \quad E \cap U \neq \phi, \quad D \cap E \cap U = \phi$$

が同時に成り立つ。ただし，ϕ は空集合を表すものとする。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）