

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1982年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる xy 平面の 1 次変換を f とする。原点以外のある点 P が f によって P 自身にうつされるならば、原点を通らない直線 l であって、 l のどの点も f によって l の点にうつされるようなものが存在することを証明せよ。

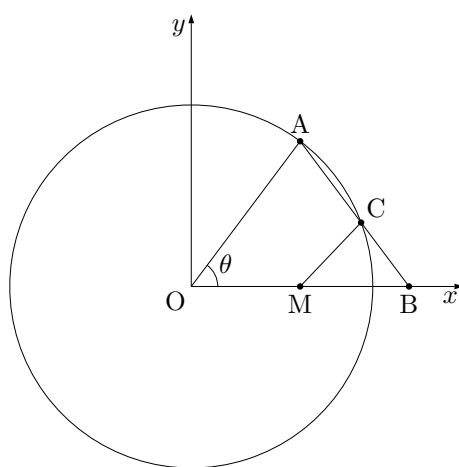
第 2 問

正 4 面体 T と半径 1 の球面 S とがあって、 T の 6 つの辺がすべて S に接しているという。 T の 1 辺の長さを求めよ。つぎに、 T の外側にあつて S の内側にある部分の体積を求めよ。

第 3 問

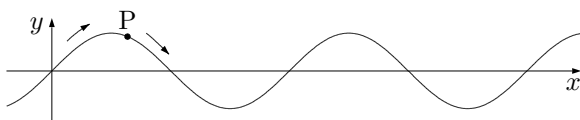
xy 平面において、点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分を動き、点 B は x 軸上を動く。ただし、線分 AB の長さは 1 であり、線分 AB は両端 A , B 以外の点 C で円周と交わるものとする。

- (1) $\theta = \angle AOB$ の取りうる値の範囲を求めよ。
- (2) BC の長さを θ で表せ。
- (3) 線分 OB の中点を M とするとき、線分 CM の長さの範囲を求めよ。



第 4 問

xy 平面上の曲線 $y = \sin x$ に沿って、図のように左から右へ進む動点 P がある。 P の速さが一定 V ($V > 0$) であるとき、 P の加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ の大きさの最大値を求めよ。ただし、 P の速さとは P の速度ベクトル $\vec{v} = (v_1, v_2)$ の大きさであり、また t を時間として $\alpha = \left(\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt} \right)$ である。



第 5 問

xyz 空間において, 不等式

$$0 \leq z \leq 1 + x + y - 3(x - y)y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq y + 1$$

のすべてを満足する x, y, z を座標に持つ点全体がつくる立体の体積を求めよ。

第 6 問

サイコロが 1 の目を上面にして置いてある。向かいあった一組の面の中心を通る直線のまわりに 90° 回転する操作をくりかえすことにより、サイコロの置きかたを変えていく。ただし、各回ごとに、回転軸および回転する向きの選び方は、それぞれ同様に確からしいとする。

第 n 回目の操作のあとに 1 の目が上面にある確率を p_n ，側面のどこかにある確率を q_n ，底面にある確率を r_n とする。

- (1) p_1, q_1, r_1 を求めよ。
- (2) p_n, q_n, r_n を $p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1}$ で表せ。
- (3) $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n, q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n, r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ を求めよ。