

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1981 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：120 点

第 1 問

$S = \{1, 2, \dots, n\}$, ただし $n \geq 2$, とする。2つの要素から成る S の部分集合を k 個とり出し, そのうちのどの 2 つも交わりが空集合であるようにする方法は何通りあるか。

つぎに, この数 (つまり何通りあるかを表す数) を $f(n, k)$ で表したとき, $f(n, k) = f(n, 1)$ をみたすような n と k (ただし, $k \geq 2$) をすべて求めよ。

第 2 問

半径 1 の円に内接する正 6 角形の頂点を $A_1, A_2, \dots, A_6$ とする。これらから、任意に（無作為に）えらんだ 3 点を頂点とする 3 角形の面積の期待値（平均値）を求めよ。ただし、2 つ以上が一致するような 3 点がえらばれたときは、三角形の面積は 0 と考える。

第 3 問

放物線 $y = x^2$ を C で表す。 C 上の点 Q を通り、 Q における C の接線に垂直な直線を、 Q における C の法線という。 $0 \leq t \leq 1$ とし、つぎの 3 条件をみたす点 P を考える。

(イ) C 上の点 $Q(t, t^2)$ における C の法線の上にある。

(ロ) 領域 $y \geq x^2$ に含まれる。

(ハ) P と Q の距離は $(t - t^2)\sqrt{1 + 4t^2}$ である。

t が 0 から 1 まで変化するとき、 P のえがく曲線を C' とする。このとき、 C と C' とで囲まれた部分の面積を求めよ。

第 4 問

実数 α (ただし $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) と、空間の点 $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$, $C(0, 0, 0)$ を与えて、つぎの 4 条件をみたす点 $P(x, y, z)$ を考える。

(イ) $z > 0$

(ロ) 2 点 P , A を通る直線と、 A を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\frac{\pi}{4}$

(ハ) 2 点 P , B を通る直線と、 B を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\frac{\pi}{4}$

(ニ) 2 点 P , C を通る直線と、 C を通り z 軸と平行な直線のつくる角は α

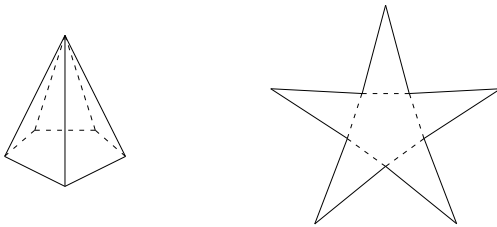
このような点 P の個数を求めよ。また、 P が 1 個以上存在するとき、それぞれの場合について、 z の値を、 α を用いて表せ。

第 5 問

$n \geq 3$ とし, 正 n 角錐の表面を, 底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える。正 n 角錐の頂点は, 展開図においては, 異なる n 個の点になっている。ここでは, これら n 個の点を通る円の半径が 1 であるような, 正 n 角錐のみを考えることにする。

- (1) 各 n に対して, このような正 n 角錐の体積の最大値 v_n を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ を求めよ。

注: 図は, $n = 5$ の場合の, 正 n 角錐とその展開図の例である。



第 6 問

a, b, c, d を実数の定数として、関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ が 3 条件

(イ) $f(-1) = 0$

(ロ) $f(1) = 0$

(ハ) $|x| \leq 1$ のとき $f(x) \geq 1 - |x|$

をみたすのは、定数 a, b, c, d がどのような条件をみたすときか。

(2) 条件 (イ), (ロ), (ハ) をみたす関数 $f(x)$ のうちで、積分

$$\int_{-1}^1 \{f'(x) - x\}^2 dx$$

の値を最小にするものを求めよ。