

入 学 試 験 問 題



数 学（理科）

（配点 120 点）

1981 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

$S = \{1, 2, \dots, n\}$, ただし $n \geq 2$, とする。2つの要素から成る S の部分集合を k 個とり出し, そのうちのどの 2 つも交わりが空集合であるようにする方法は何通りあるか。

つぎに, この数 (つまり何通りあるかを表す数) を $f(n, k)$ で表したとき, $f(n, k) = f(n, 1)$ をみたすような n と k (ただし, $k \geq 2$) をすべて求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

半径 1 の円に内接する正 6 角形の頂点を $A_1, A_2, \dots, A_6$ とする。これらから、任意に（無作為に）えらんだ 3 点を頂点とする 3 角形の面積の期待値（平均値）を求めよ。ただし、2 つ以上が一致するような 3 点がえらばれたときは、三角形の面積は 0 と考える。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

放物線 $y = x^2$ を C で表す。 C 上の点 Q を通り、 Q における C の接線に垂直な直線を、 Q における C の法線という。 $0 \leq t \leq 1$ とし、つぎの 3 条件をみたす点 P を考える。

(イ) C 上の点 $Q(t, t^2)$ における C の法線の上にある。

(ロ) 領域 $y \geq x^2$ に含まれる。

(ハ) P と Q の距離は $(t - t^2)\sqrt{1 + 4t^2}$ である。

t が 0 から 1 まで変化するとき、 P のえがく曲線を C' とする。このとき、 C と C' とで囲まれた部分の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

実数 α (ただし $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) と、空間の点 $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$, $C(0, 0, 0)$ を与えて、つぎの 4 条件をみたす点 $P(x, y, z)$ を考える。

(イ) $z > 0$

(ロ) 2 点 P , A を通る直線と, A を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\frac{\pi}{4}$

(ハ) 2 点 P , B を通る直線と, B を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\frac{\pi}{4}$

(ニ) 2 点 P , C を通る直線と, C を通り z 軸と平行な直線のつくる角は α

このような点 P の個数を求めよ。また, P が 1 個以上存在するとき, それぞれの場合について, z の値を, α を用いて表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

$n \geq 3$ とし、正 n 角錐の表面を、底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える。正 n 角錐の頂点は、展開図においては、異なる n 個の点になっている。ここでは、これら n 個の点を通る円の半径が 1 であるような、正 n 角錐のみを考えることにする。

(1) 各 n に対して、このような正 n 角錐の体積の最大値 v_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ を求めよ。

注：図は、 $n = 5$ の場合の、正 n 角錐とその展開図の例である。



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

a, b, c, d を実数の定数として、関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ が 3 条件

(イ) $f(-1) = 0$

(ロ) $f(1) = 0$

(ハ) $|x| \leq 1$ のとき $f(x) \geq 1 - |x|$

をみたすのは、定数 a, b, c, d がどのような条件をみたすときか。

(2) 条件 (イ), (ロ), (ハ) をみたす関数 $f(x)$ のうちで、積分

$$\int_{-1}^1 \{f'(x) - x\}^2 dx$$

の値を最小にするものを求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

