

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1980年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 BC , CA , AB 上に, それぞれ点 P , Q , R を $BP = CQ = AR < \frac{1}{2}$ となるようにとり, 線分 AP と線分 CR の交点を A' , 線分 BQ と線分 AP の交点を B' , 線分 CR と線分 BQ の交点を C' とする。 $BP = x$ として, 次の問に答えよ。

(1) BB' , PB' を x を用いて表せ。

(2) 三角形 $A'B'C'$ の面積が三角形 ABC の面積の $\frac{1}{2}$ になるような x の値を求めよ。

第 2 問

長さ 2 の線分 NS を直径とする球面 K がある。点 S において球面 K に接する平面の上で、 S を中心とする半径 2 の四分円（円周の $\frac{1}{4}$ の長さをもつ円弧） $\widehat{AB}$ と線分 AB をあわせて得られる曲線上を、点 P が 1 周する。このとき、線分 NP と球面 K との交点 Q の描く曲線の長さを求めよ。

第 3 問

α を実数, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, 正整数 n について $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。

- (1) ある n について $q_n = 0$ となるような α の値をすべて求めよ。
- (2) すべての n について $q_n \neq 0$ となるような α を考える。そのとき, $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ を α を用いて表し, また, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ の値のうちで異なるものの個数を求めよ。

第 4 問

xy 平面上の動点 P の座標 (x, y) は, 時刻 t を用いて

$$\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = k \sin^2 t \cos^2 t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

と表されるものとする。ただし k は正の定数である。このとき原点と P との間の距離の 2 乗の最大値および最小値を, k を用いて表せ。

第 5 問

1 辺の長さが 1 の正四面体 $A_0A_1A_2A_3$ がある。点 P はこの正四面体の辺上を毎秒 1 の速さで動き、各頂点に達したとき、そこから出る 3 辺のうちの 1 辺を $\frac{1}{3}$ ずつの確率で選んで進む。 P は時刻 $t = 0$ において頂点 A_0 にあるとする。また n を 0 または正の整数とし、点 P が時刻 $t = n$ において頂点 A_i にある確率を $p_i(n)$ で表す ($i = 0, 1, 2, 3$)。

- (1) 数学的帰納法を用いて、 $p_1(n) = p_2(n) = p_3(n)$ を証明せよ。
- (2) $p_0(n)$ と $p_1(n)$ の値を求めよ。

第 6 問

xy 平面の第 1 象限にある点 A を頂点とし、原点 O と x 軸上の点 B を結ぶ線分 OB を底辺とする二等辺三角形 ($AO = AB$) の面積を s とする。この三角形と不等式 $xy \leq 1$ で表される領域との共通部分の面積を求め、これを s の関数として表せ。