

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1979年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

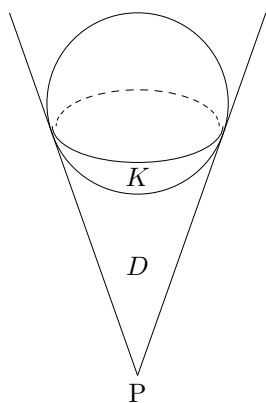
xy 平面上の 4 点 A (0, 0), B (1, 0), C (1, 1), D (0, 1) を頂点とする正方形を Q とする。

実数 t に対して一次変換 $U_t = \begin{pmatrix} 1+t & t+t^2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$, $V_t = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ t+t^2 & 1+t \end{pmatrix}$ を考え, Q が U_t によって写された図形と, Q が V_t によって写された図形との共通部分の面積を $S(t)$ とする。 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき, t の関数 $S(t)$ のグラフの概形を描き, $S(t)$ のこの範囲での最大値を求めよ。

第 2 問

図のように、半径 1 の球が、ある円錐の内部にはめこまれる形で接しているとする。球と円錐面が接する点の全体は円をなすが、その円を含む平面を α とする。

円錐の頂点を P とし、 α に関して P と同じ側にある球の部分を K とする。また、 α に関して P と同じ側にある球面の部分および円錐面の部分で囲まれる立体を D とする。いま、 D の体積が球の体積の半分に等しいという。そのときの K の体積を求めよ。



第 3 問

a を正の整数とし、数列 $\{u_n\}$ を次のように定める。

$$u_1 = 2, \quad u_2 = a^2 + 2, \quad u_n = au_{n-2} - u_{n-1}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

このとき、数列 $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないために、 a のみたすべき必要十分条件を求めよ。

第 4 問

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり、円の内部または周上に 2 点 Q, R を、 $\triangle PQR$ が 1 辺の長さ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形になるようにとる。このとき、 $OQ^2 + OR^2$ の最大値および最小値を求めよ。

第 5 問

t を正の数とし、次の条件 (A), (B) によって定まる x の 3 次式を $f(x)$ とする。

(A) 曲線 $y = f(x) \cdots (1)$ は直線 $y = x \cdots (2)$ の上の 2 点 $P(-t, -t)$, $O(0, 0)$ を通る。

(B) $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$

さて、曲線 (1) と直線 (2) との交点のうちで、 x 座標が最大のものを Q とし、曲線 (1) の点 O から点 Q までの部分と、線分 OQ とで囲まれた領域の面積を $S(t)$ とする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ を求めよ。

第 6 問

a を正の定数とし、座標平面上に 3 点 $P_0(1, 0)$, $P_1(0, a)$, $P_2(0, 0)$ が与えられたとする。

P_2 から P_0P_1 に垂線をおろし、それと P_0P_1 との交点を P_3 とする。

P_3 から P_1P_2 に垂線をおろし、それと P_1P_2 との交点を P_4 とする。

以下同様に繰り返し、一般に P_n が得られたとき、

P_n から $P_{n-2}P_{n-1}$ に垂線をおろし、それと $P_{n-2}P_{n-1}$ との交点を P_{n+1} とする。

このとき次の問に答えよ。

- (1) P_6 の座標を求めよ。
- (2) 上の操作をつづけていくとき、 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ はどのような点に限りなく近づくか。

