

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1978年

試験時間：150分

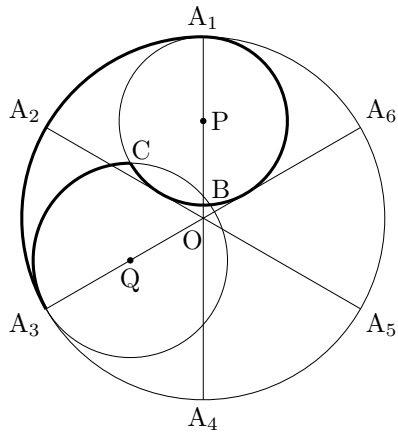
問題数：6問

配点：120点

第 1 問

半径 1 の円 O の周を 6 等分する点を図のように順次 $A_1, A_2, \dots, A_6$ とする。弧 $A_2A_1A_6$ および半径 OA_2, OA_6 に接する円の中心を P とし、この円 P の周と線分 OP の交点を B とする。線分 OA_3 上に $OQ = PA_1$ をみたすように点 Q を定める。 Q を中心とし QA_3 を半径とする円周と円 P の交点のうちで、直径 A_1B に関し点 A_2 と同じ側にあるものを C とする。

このとき四辺形 $OPCQ$ は平行四辺形であることを証明せよ。また弧 $A_1A_2A_3$, 弧 A_3C , 弧 CBA_1 によって囲まれた領域（図の太線で囲まれた部分）の面積を求めよ。



第 2 問

x の関数 $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ の, $t \leq x \leq t + 1$ という範囲における最大値を $g(t)$ とする。 t が $-3 \leq t \leq 3$ の範囲を動くとき, 関数 $s = g(t)$ を求め, そのグラフを描け。

第 3 問

C を放物線 $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}$ とする。 C 上の点 $Q\left(t, \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}\right)$ を通り、 Q における C の接線と垂直な直線を、 Q における C の法線という。

- (1) xy 平面上の、点 $P(x, y)$ で P を通る C の法線が一本だけ引けるようなものの存在範囲を求め、 xy 平面上に図示せよ。
- (2) (1) で求めた範囲と放物線の内部（不等式 $y > \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}$ の定める範囲）の共通部分の面積を求めよ。

第 4 問

行列 $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し、次の問に答えよ。

任意の整数 $n > 0$ に対して、 A^n を数学的帰納法を用いて求めよ。また、与えられた $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対し $A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくとき、極限

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

を求めよ。ただし、 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

第 5 問

三角形 ABC において、各辺の長さを、 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ と記す。いま、辺 BC を n 等分する点を $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ とし、 $P_n = C$ とする。このとき極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (AP_1^2 + AP_2^2 + \dots + AP_n^2)$$

を求め、これを a, b, c で表せ。

第 6 問

xy 平面において放物線 $y = x^2$ の、 $0 < x < 1$ に対応する部分を L とする。(すなわち $L = \{(x, x^2) \mid 0 < x < 1\}$ である。) 点 $P(x, x^2)$ における L の接線が直線 $y = 0$, 直線 $x = 1$ と交わる点をそれぞれ A , B とする。また座標が $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ である三点を、それぞれ O , C , D とする。

以下つねに $0 < x < 1$ という範囲で考えるものとする。

- (1) $\triangle PAC$, $\triangle PCB$ の面積をそれぞれ $g(x)$, $h(x)$ とするとき, $g(x) \leq h(x)$ となる x の範囲を求めよ。
- (2) 線分 OC および線分 CD と放物線の一部 L で囲まれた範囲を M とする。ただし M はその周である線分 OC , CD および L を含むものとする。いま L 上の点 $P(x, x^2)$ を頂点とし, M に含まれるような三角形のうちで, 最大の面積を持つものの面積を $f(x)$ とする。関数 $f(x)$ を求め, そのグラフを描け。また $f(x)$ の極値を求めよ。ただし $I = \{x \mid 0 < x < 1\}$ の点 a で, 関数 f が極小値 (または極大値) をとるとは, a に近い I のすべての点 x に対して $f(a) \leq f(x)$ (または $f(a) \geq f(x)$) となることをいう。極大値と極小値をあわせて極値という。

